

用八個表教授「利息」

許慧貞

在單利息及複利息這個課題，一般課堂都著眼於它們的分別：「在計算單利息時，本金自始至終維持不變；而在計算複利息時，每期所得的利息會加入為下一期本金的一部份。」，然後順理成章地兩個課題各自處理，少有關聯；而應用兩條公式：

1. 單利息 = 本金 × 年利率 × 年期
2. 複利息的本利和 = 本金 × (1 + 每期利率)^{期數}

亦要上佳的計算能力和代數技巧，公式演練遂成為這個課題的主要任務。

兩種不同計利息的方法如何引申至這兩條公式，學生不甚了了，縱使他們沒有混淆兩者，亦知其然而不知其所以然。此外，相關的問題亦欠缺討論，例如：

1. 為什麼計算複利息要考慮計息週期如「3 個月計息一次」等，單利息則可以保持以年為單位而不用分期呢？
2. 為什麼沒有直接計算複利息的公式，而要先計本利和呢？

筆者認為，惟有小心觀察思考單利息和複利息相同之處，才能洞察兩者相異之處，從而深入理解兩種計算方法。

為了補充常規教學，筆者以「本金 \$1000，年利率 20%，年期 3 年」為大前提，設計了兩個近似的案例，第一個是「每年計息一次」，第二個是「每半年計息一次」，每個案例又分別計算單利息及複利息，筆者共用了八個表分別展示它們的計算方法。

表 1 至表 4 屬於第一個案例，表 5 至表 8 屬於第二個案例。

單利息對複利息 案例一

本金 = \$1000，年利率 = 20%，年期 = 3 年
2007 年初存入款項；每年計算利息一次

<u>單利息計法</u>	
本金自始至終維持不變	
07 年底得利息	$\$1000 \times 20\% = \200
08 年底得利息	$\$1000 \times 20\% = \200
09 年底得利息	$\$1000 \times 20\% = \200
共得利息	\$600

表 1

<u>複利息計法</u>	
*每期所得的利息將加入為下一期本金的一部份	
07 年底得利息	$\$1000 \times 20\% = \200
08 年底得利息	$\$1200^* \times 20\% = \240
09 年底得利息	$\$1440^* \times 20\% = \288
共得利息	\$728

表 2

<u>單利息計法</u>	
金額累積過程：	
金額每年增加 $\$1000 \times 20\% = \200	
開始	1 年後
\$1000	\$1200
+ \$200	+ \$200
2 年後	3 年後
\$1400	\$1600
+ \$200	+ \$200
<u>公式</u>	
單利息 = 本金 \times 年利率 \times 年期	
= $\$1000 \times 20\% \times 3$	
= \$600	
本利和 = $\$1000 + \600	
= \$1600	

表 3

<u>複利息計法</u>	
金額累積過程：	
金額每年增加 20%，即乘以 $(1 + 20\%)$	
開始	1 年後
\$1000	\$1200
$\times(1+20\%)$	$\times(1+20\%)$
2 年後	3 年後
\$1440	\$17280
$\times(1+20\%)$	$\times(1+20\%)$
<u>公式</u>	
本利和 = 本金 $\times (1 + \text{每期利率})^{\text{期數}}$	
= $\$1000 \times (1 + 20\%)^3$	
= $\$1000 \times 1.2^3$	
= \$1728	
複利息 = $\$1728 - \1000	
= \$728	
計算複利息，先求本利和	

表 4

比較表 1 和表 2 可以突出重點「在計算單利息時，本金自始至終維持不變；而在計算複利息時，每期所得的利息會加入為下一期本金的一部份。」另外亦可看到，在同一條件之下，複利息較單利息為多。

表 3 和表 4 顯示金額累積過程的規律，並對照用公式的計法。

單利息對複利息 案例二

本金 = \$1000，年利率 = 20%，年期 = 3 年
2007 年初存入款項；每半年計算利息一次

<u>單利息計法</u> 每期利率 = 20% ÷ 2 = 10%	
07 年 6 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
07 年 12 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
08 年 6 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
08 年 12 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
09 年 6 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
09 年 12 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
共得利息	\$600

表 5

<u>複利息計法</u> 每期利率 = 20% ÷ 2 = 10%	
07 年 6 月得利息	$\$1000 \times 10\% = \100
07 年 12 月得利息	$\$1100 \times 10\% = \110
08 年 6 月得利息	$\$1210 \times 10\% = \121
08 年 12 月得利息	$\$1331 \times 10\% = \133.1
09 年 6 月得利息	$\$1464.1 \times 10\% = \146.41
09 年 12 月得利息	$\$1610.51 \times 10\% = \161.051
共得利息	\$771.561

表 6

<u>單利息計法</u> 每期利率 = 20% ÷ 2 = 10%	
金額累積過程：	
金額每年增加 $\$1000 \times 10\% = \100	
開始	1 期後
\$1000	→ \$1100
	+ \$100
2 期後	3 期後
\$1200	→ \$1300
	+ \$100
4 期後	5 期後
→ \$1400	→ \$1500
	+ \$100
6 期後	
→ \$1600	
	+ \$100
<u>公式</u>	
單利息 = 本金 × 年利率 × 年期	
= $\$1000 \times 20\% \times 3$	
= \$600	
本利和 = $\$1000 + \600	
= \$1600	

表 7

<u>複利息計法</u> 每期利率 = 20% ÷ 2 = 10%	
金額累積過程：	
金額每年增加 10%，即乘以 $(1 + 10\%)$	
開始	1 期後
\$1000	→ \$1100
	$\times(1+10\%)$
2 期後	3 期後
\$1210	→ \$1331
	$\times(1+10\%)$
4 期後	5 期後
→ \$1464.1	→ \$1610.51
	$\times(1+10\%)$
6 期後	
→ \$1771.561	
	$\times(1+10\%)$
<u>公式</u>	
本利和 = 本金 $\times (1 + \text{每期利率})^{\text{期數}}$	
= $\$1000 \times (1 + 20\% / 2)^6$	
= $\$1000 \times 1.1^6$	
= \$1771.561	
複利息 = $\$1771.561 - \1000	
= \$771.561	

表 8

表 5 至表 8 是表 1 至表 4 在案例二的翻版。

案例二多提供一個例子以作比較，豐富了學生的思考，亦清楚表達了「每半年計息一次」的意思。

比較案例一及案例二，可知「每年計息一次」及「每半年計息一次」對計算單利息沒有影響，對複利息則有。

表 1、表 2、表 5 及表 6 顯示了計算每一年或每一期利息的過程，這是應用公式直接計算結果所欠缺的；另一方面，這些重覆的步驟亦襯托出應用公式的便捷。

從表 4 及表 8，可知利息和本金合在一起才看到複利息金額累積的規律；如果應用公式，要整個過程完成後才可以結算淨得的利息。

幾點補充

表 1、表 3、表 5 及表 7 展示了單利息公式的由來，但未有闡釋複利息本利和公式，現嘗試以案例一說明：

計算單利息金額的累積過程

2007 年初存入 \$1000

$$2007 \text{ 年底本利和 } \$1000 + \$1000 \times 20\% \quad (1)$$

$$2008 \text{ 年底本利和 } \$1000 + \$1000 \times 20\% + \underline{\$1000} \times 20\% \quad (2)$$

↑

本金維持不變

計算複利息金額的累積過程

2007 年初存入 \$1000

$$2007 \text{ 年底本利和 } \$1000 + \$1000 \times 20\% \quad (3)$$

$$2008 \text{ 年底本利和 } \$1000 + \$1000 \times 20\% + \underline{(\$1000 + \$1000 \times 20\%)} \times 20\% \quad (4)$$

↑

新的本金

比較數式 (1) 和 (3)，在 2007 年底時兩種計息方法沒有分別；至 2008 年底，兩種計法框架依然相同，但由於複利息計法有新的本金，具體細節有異，如數式 (2) 及 (4) 所示。

再者，由數式 (4)，得

2008 年底本利和

$$\begin{aligned} &= \$1000 + \$1000 \times 20\% + (\$1000 + \$1000 \times 20\%) \times 20\% \\ &= \$1000 \times (1 + 20\%) + \$1000 \times (1 + 20\%) \times 20\% \\ &= \$1000 \times (1 + 20\%) \times (1 + 20\%) \\ &= \$1000 \times (1 + 20\%)^2 \end{aligned}$$

這裡因式分解有效簡化了數式 (4)，方便再多推一步：

2009 年底本利和

$$\begin{aligned} &= \$1000 \times (1 + 20\%)^2 + [\$1000 \times (1 + 20\%)^2] \times (1 + 20\%) \\ &= \$1000 \times (1 + 20\%)^3 \end{aligned}$$

這距離目標「複利息的本利和 = 本金 $\times (1 + \text{每期利率})^{\text{期數}}$ 」已不遠了。如果學生能力可及，又有足夠的好奇心，補上這一筆就更佳。

教師亦應補充：以上案例中的銀行存款利息比現實高得多，設定 20% 年利率只爲了數字上的方便；又現實生活中計複利息一般以一日爲一期，比課本的例子更爲繁複。

筆者教授這個課題時有一位學生缺席，於是補派筆記著她自修，事後作簡單的口頭考核，她倒也解說得頭頭是道，可算是一項意外的收穫呢！

作者電郵：estella.hui@gmail.com