從一道數學題談起

胡逢亮
民生書院

介紹

本文試從不同層次和角度探討一條有關多項式的題目（取自 *MATH Problem Book I*, p.1），藉以看看怎樣帶引學生從他們能力所及的方法，逐步琢磨出一個層次較高的解法，並從中學習不同方法以及它們之間的關係。

題目（Crux Mathematicorum, Problem 7）

Find (without Calculus) a fifth degree polynomial $p(x)$ such that $p(x) + 1$ is divisible by $(x-1)^3$ and $p(x) - 1$ is divisible by $(x+1)^3$.

題目看似不易解，其實只要一個普通中四學生，也能解決。

方法一

設 $p(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$。由長除法，

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)^3[Ax^2 + (3A+B)x^2 + (6A+3B+C)] \\ &\quad + (10A+6B+3C+D)x^2 + (-15A-8B-3C+E)x + (6A+3B+C+F+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)^3[Ax^2 + (-3A+B)x^2 + (6A-3B+C)] \\ &\quad + (-10A+6B-3C+D)x^2 + (-15A+8B-3C+E)x + (-6A+3B-C+F-1) \end{aligned}$$

因此有以下聯立方程：

$$\begin{cases} 10A+6B+3C+D = 0 \\ -15A-8B-3C+E = 0 \\ 6A+3B+C+F+1 = 0 \\ -10A+6B-3C+D = 0 \\ -15A+8B-3C+E = 0 \\ -6A+3B-C+F-1 = 0 \end{cases}$$

花點耐性，可以解出 $A = -\dfrac{3}{8}$，$B = 0$，$C = \dfrac{5}{4}$，$D = 0$，$E = -\dfrac{15}{8}$，

$F = 0$。於是 $p(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x$。

說時容易做時難。用長除法一來易出錯，二來其實我們要的只是除後的餘項式。可否避用長除法呢？仔細推敲，上面解法的關鍵是「比較係數」。

方法二

設 $p(x) + 1 = (x-1)^3(ax^2 + bx + c)$，$p(x) - 1 = (x+1)^3(mx^2 + nx + r)$。

所以 $p(x) + 1 = ax^5 + (-3a + b)x^4 + (3a - 3b + c)x^3 + (-a + 3b - 3c)x^2 + (-b + 3c)x - c$，

同樣地 $p(x) + 1 = mx^5 + (3m + n)x^4 + (3m + 3n + r)x^3 + (m + 3n + 3r)x^2 + (n + 3r)x + r$。

因此 $p(x)$ 可以用 a、b、c 表示，也可以用 m、n、r 表示。比較係數，

$$\begin{cases} m = a \\ 3m + n = -3a + b \\ 3m + 3n + r = 3a - 3b + c \\ m + 3n + 3r = -a + 3b - 3c \\ n + 3r = -b + 3c \\ r + 1 = -c - 1 \end{cases}$$

也花點耐性，可解出 $a = -\frac{3}{8}$，$b = -\frac{9}{8}$，$c = -1$ 以及 $m = -\frac{3}{8}$，$n = \frac{9}{8}$，$r = -1$。於是，同樣得出 $p(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x$。

方法三

回頭想一想。甚麼是比較係數法呢？方法背後告訴了我們甚麼呢？於中學程度看，比較係數是代入任何數到全等式中，左右兩邊仍然相等的一個結果。方法一和方法二中代入的都是一些實在的數字。有沒有可能代入一個「數字」而能夠一次解出多個係數呢？考慮如下例子。

例　求 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x + 1$ 被 $(x-2)(x-3)$ 除時的餘項式。

解　我們知道 $f(x) = (x-2)(x-3)\,g(x) + Px + Q$。代入 $x = 2$ 和 $x = 3$，可以

得到聯立方程 $\begin{cases} 2P+Q=1 \\ 3P+Q=52 \end{cases}$。解出 P 和 Q，知餘項式為 $53x-107$。

但是，我們也可以一次過代入 $x = 2$ 和 3，方法就是取 $x^2 = 5x - 6$，如是者，餘項

$$\begin{aligned} &= x\cdot x^4 - 3x^4 + 2x\cdot x^2 - x + 1 \\ &= x(5x-6)^2 - 3(5x-6)^2 + 2x(5x-6) - x + 1 \\ &= 25x^3 - 125x^2 + 203x - 107 \\ &= 25x(5x-6) - 125x^2 + 203x - 107 \\ &= 53x - 107。\end{aligned}$$

回到原題，再考察題目的條件：$(x+1)^3 \mid p(x) - 1$ 和 $(x-1)^3 \mid p(x) + 1$。留意到若代換 x 為 $-x$，則 $(x+1)^3$ 會變成 $-(x-1)^3$，而 $(x-1)^3$ 會變成 $-(x+1)^3$。於是有 $-(x-1)^3 \mid p(-x) - 1$ 和 $-(x+1)^3 \mid p(-x) + 1$。從而 $(x-1)^3 \mid -p(-x) + 1$ 和 $(x+1)^3 \mid -p(-x) - 1$。

參看方法一，我們知道求 $p(x)$ 等同解一組聯立六元一次方程。眾所周知，結果有三：沒有解、唯一解和無限解。可證無限解並不可能發生。

設 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 同時滿足題目的條件，並設 $p_2(x) = p_1(x) + h(x)$。那麼 $p_2(x) - 1 = p_1(x) - 1 + h(x)$，於是 $(x+1)^3u(x) = (x+1)^3v(x) + h(x)$，得 $h(x) = (x+1)^3[u(x) - v(x)]$，其中 $\deg(u-v) \le 2$。同樣 $p_2(x) + 1 = p_1(x) + 1 + h(x)$，於是 $(x-1)^3s(x) = (x-1)^3t(x) + h(x)$，得 $h(x) = (x-1)^3[s(x) - t(x)]$，其中 $\deg(s-t) \le 2$。由以上結果，$(x+1) \mid (x-1)$，故矛盾。

所以 $p(x)$ 最多有唯一解。由於由題目的條件：$(x+1)^3 \mid p(x) - 1$ 和 $(x-1)^3 \mid p(x) + 1$ 可推得：$(x-1)^3 \mid -p(-x) + 1$ 和 $(x+1)^3 \mid -p(-x) - 1$，即 $-p(-x)$ 亦為滿足題目條件的另一解，因此可導出 $p(x) = -p(-x)$。就是說 $p(x)$ 是奇函數。因為 $p(x)$ 是多項式，所以 $B = D = F = 0$，這就是所謂一次解出多個係數了。

將 x 代換為 $-x$，可看成是一次代入「數字」$x = 1$ 和 -1、2 和 -2、… 等，到方程 $p(x) + 1 = (x-1)^3(ax^2 + bx + c)$ 和 $p(x) - 1 = (x+1)^3(mx^2 + nx + r)$ 之中，也就是方程 $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F + 1 = (x-1)^3(ax^2 + bx + c)$ 和 $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F - 1 = (x+1)^3(mx^2 + nx + r)$ 之中。

當 $x = 1$ 和 -1 時，有

$$\begin{cases} A+B+C+D+E+F+1 &= 0 \\ A+B+C+D+E+F-1 &= 2^3(m+n+r) \\ -A+B-C+D-E+F+1 &= -2^3(a-b+c) \\ -A+B-C+D-E+F-1 &= 0 \end{cases}$$

所以 $B+D+F=0$。

當 $x=2$ 和 -2 時，有

$$\begin{cases} 32A+16B+8C+4D+2E+F+1 &= 4a+2b+c \\ 32A+16B+8C+4D+2E+F-1 &= 3^3(4m+2n+r) \\ -32A+16B+8C+4D+2E+F+1 &= -3^3(4a-2b+c) \\ -32A+16B+8C+4D+2E+F-1 &= -(4m-2n+r) \end{cases}$$

所以 $16B+4D+F=0$。

如是者，可得 $81B+9D+F=0$、$256B+16D+F=0$、…。所以 $B=D=F=0$。

當然，A、C 和 F 仍未解出，要再用比較係數法，但接著所得的聯立方程比方法一和二的簡單得多，即

$$\begin{cases} 3m+n &= 0 \\ m+3n+3r &= 0 \\ r+1 &= 0 \end{cases}$$

方法四

上面唯一性的證明啓發我們簡化方法三，方法如下：

因為 $(x+1)^3 \mid p(x)-1$ 和 $(x+1)^3 \mid -p(-x)-1$，所以 $(x+1)^3 \mid p(x)+p(-x)$。同樣地，因為 $(x-1)^3 \mid p(x)+1$ 和 $(x-1)^3 \mid -p(-x)+1$，所以 $(x-1)^3 \mid p(x)+p(-x)$。因此推出 $(x-1)^3(x+1)^3 \mid p(x)+p(-x)$。可是，$\deg[\,p(x)+p(-x)] \le 5$，而 $\deg[(x-1)^3(x+1)^3]=6$。結果唯有 $p(x)+p(-x)=0$。也就是說 $p(x)$ 是奇函數。這正是 *MATH Problem Book I* 所提供的解。正是神來之筆，其來有自。

方法五

已知 $p(x)+1=(x-1)^3(ax^2+bx+c)$，$p(x)-1=(x+1)^3(mx^2+nx+r)$。兩式相減，得 $(x-1)^3(ax^2+bx+c)-(x+1)^3(mx^2+nx+r)=2$。有點兒眼熟吧！沒錯，就是歐幾里得算法的一個結果。

由輾轉相除法得，
$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x-1)^3+6x^2+2\text{，}\\ (x-1)^3 &= (\frac{1}{6}x-\frac{1}{2})(6x^2+2)+\frac{8}{3}x\text{，}\\ 6x^2+2 &= \frac{9}{4}x\cdot\frac{8}{3}x+2\text{。}\end{aligned}$$

所以 $2=(\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+1)(x+1)^3-(\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x+1)(x-1)^3$。由此得 $p(x)=(\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x+1)(x-1)^3+1=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$。

總結

方法二是簡化，方法三是跳躍，方法四是綜合，方法五是轉向。方法三、四要求的對稱性較其他方法高。舉例說，若果將題目改為 $p(x)$ 是滿足 $\deg p(x)=5$，$(x-1)^3\mid p(x)+2$ 和 $(x+1)^3\mid p(x)-1$ 的多項式，方法三、四就要另謀出路，而方法一、二和五則仍然可行。

對方法二、三、四和五互相參照是饒有趣味的事情。另外它們之間的關係，也是一個值得再探討的問題。

討論

由方法五可以看到，歐幾里得算法會自然地由條件 $(x+1)^3\mid p(x)-1$ 和 $(x-1)^3\mid p(x)+1$ 導出 $p(x)$ 的解。也就是 $p(x)$ 的解必然存在。問題是：$p(x)$ 何時會有解？何時唯一?

讓我們看看解在甚麼時候不是唯一的。設 $p(x)=(x+1)^3F(x)+1$ 和 $p(x)=(x-1)^3G(x)-1$；$q(x)=(x+1)^3K(x)+1$ 和 $q(x)=(x-1)^3L(x)-1$，其中 $\deg p(x)=\deg q(x)$ 及 $p(x)\neq q(x)$。

故此，$(x-1)^3G(x)-(x+1)^3F(x)=2$；$(x-1)^3L(x)-(x+1)^3K(x)=2$。

$$\begin{aligned}
\text{於是，}\quad (x-1)^3 G(x) - (x+1)^3 F(x) &= (x-1)^3 L(x) - (x+1)^3 K(x) \\
(x-1)^3 G(x) - (x-1)^3 L(x) &= (x+1)^3 F(x) - (x+1)^3 K(x) \\
(x-1)^3 [G(x) - L(x)] &= (x+1)^3 [F(x) - K(x)]
\end{aligned}$$

因為 $(x-1)^3$ 和 $(x+1)^3$ 沒有公因式，故此唯有 $(x-1)^3 \mid [F(x)-K(x)]$ 和 $(x+1)^3 \mid [G(x)-L(x)]$。由此可寫 $F(x)-K(x) = \alpha(x)\cdot(x-1)^3$，$G(x)-L(x) = \beta(x)\cdot(x+1)^3$，其中 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是多項式。

所以有 $K(x) = F(x) + \alpha(x)\cdot(x-1)^3$，$L(x) = G(x) + \beta(x)\cdot(x+1)^3$。

$$\begin{aligned}
\text{於是}\quad q(x) &= (x+1)^3 K(x) + 1 \\
&= (x+1)^3 F(x) + \alpha(x)\cdot(x+1)^3 (x-1)^3 + 1 \\
&= p(x) + \alpha(x)\cdot(x+1)^3 (x-1)^3
\end{aligned}$$

因 $\deg[(x-1)^3(x+1)^3] = 6$，所以只有當 $\deg p(x) \le 5$ 時解是唯一的。

另一方面，寫 $p(x) = (x+1)^3(a_n x^n + \cdots + a_0) + 1$ 及 $p(x) = (x-1)^3(b_n x^n + \cdots + b_0) - 1$。共有 $(n+1)+(n+1)$ 個未知數 a_0、$\cdots$、a_n、b_0、$\cdots$、b_n，並可形成 $n+4$ 條聯立方程。當未知數的數目多於或等於聯立方程的數目時，因為 $p(x)$ 的解必然存在，所以聯立方程有解。也就是說，$(n+1)+(n+1) \ge n+4$ 時（即 $n \ge 2$ 時），有解。所以當 $\deg p(x) \ge 5$ 的時候有解。合起來，當 $\deg p(x) = 5$ 時，$p(x)$ 有唯一解。可以這樣理解，比較係數法和歐幾里得算法是互補的，各自給出解的存在性和唯一性的條件，並保證當 $\deg p(x) = 5$ 時，$p(x)$ 有唯一解。

將結果一般化，有以下定理。

定理　設 $p(x)$ 為滿足 $m(x) \mid p(x) - a$ 和 $n(x) \mid p(x) - b$ 的多項式，其中 a 和 b 是實數，$m(x)$ 和 $n(x)$ 是多項式，$\deg m(x) = m$ 和 $\deg n(x) = n$，而且 $m(x)$ 和 $n(x)$ 無公因子。那麼當 $\deg p(x) = m + n - 1$ 時，$p(x)$有唯一解。

讀者可試解滿足 $(x-1)^2 \mid q(x) + 1$ 和 $(x+1)^3 \mid q(x) - 1$ 的多項式 $q(x)$，並預先估計 $q(x)$ 的次數。答案在本文末。

感想

要完成以上的討論，繁複的計算在所難免，這亦少不了大大減低學生探究的意欲。事實上，本文的計算都是有借助代數運算軟件完成的。一個想法是，我們應否容許學生使用可作代數運算的軟件或計算機學習數學呢？容許，會產生很多學習上的問題，就像今時今日容許用計算機一樣；不容許，似乎又放棄了很多探究的機會以及純因運算造成的障礙。訂立用與不用之間的界線，以及因為用了而產生的教學上及評核上的問題，也是一個頗難圓滿解答的問題。

（答案：$q(x) = \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}$，$\deg q(x) = 4$）

參考書目

Li, Kin Y. (ed.) (2001). *MATH Problem Book I*. Hong Kong: Hong Kong Mathematical Society IMO(HK) Committee.

作者電郵：msc-wfl00@hkedcity.net