一道西部數學奧林匹克賽題溯源與推廣

蔣明斌
四川省蓬安縣蓬安中學

1、題目

2004 年西部數學奧林匹克最後一題為 [1]：求證：對任意正實數 a、b、c 都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

2、溯源

令 $x=a^2$，$y=b^2$，$z=c^2$，則不等式 (1) 等價於

$$1<\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

式 (2) 右側的不等式最早是文 [2] 的一個猜想，文 [3]、[4]、[5]、[6] 先後用不同方法證明它是成立的；式 (2) 的左側的不等式是文 [7] 給出的一個不等式。

3、推廣

對不等式 (1) 作加權推廣，得到

定理　若 a、b、$c>0$，則

(i)　當 $\lambda\ge 8$ 時，有

$$\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}\le\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}<2 \tag{3}$$

(ii)　當 $\frac{5}{4}<\lambda<8$ 時，有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}<2 \tag{4}$$

(iii)　當 $0<\lambda\le\frac{5}{4}$ 時，有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}<\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{5}$$

注：當 $\lambda = 1$ 時，由定理 (iii) 中的不等式 (5) 即得不等式 (1)。

很顯然，定理等價於如下的：

命題 設 a、b、$c > 0$，則

(i) 當 $\lambda \ge 8$ 時，有

$$\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \le \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}} \tag{6}$$

(ii) 當 $0 < \lambda < 8$ 時，有

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}} \tag{7}$$

(iii) 當 $0 < \lambda \le \frac{5}{4}$ 時，有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}} \le \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{8}$$

(iv) 當 $\lambda > \frac{5}{4}$ 時，有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}} < 2 \tag{9}$$

注記：當 $\lambda \ge 8$ 時，作變換：$\frac{b^2}{a^2} \to \frac{bc}{a^2}$、$\frac{c^2}{b^2} \to \frac{ca}{b^2}$、$\frac{a^2}{c^2} \to \frac{ab}{c^2}$，則不等式 (6) 等價於

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \ge \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{10}$$

其中 a、b、$c > 0$。

特別地，當 $\lambda = 8$ 時，即得 IMO42-2:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1 \tag{11}$$

所以不等式 (10) 是 IMO42-2 的推廣，國內最早見於文 [8]。《美國數學月刊》問題欄曾作為數學問題第 10944 題 [9]。不等式 (11) 引起廣大同行的廣泛關注，近年來發表涉及不等式 (11) 的研究文章數十篇，其中包括本

文作者的一些工作 [10], [11]，後文中，我們將給出 (10) 的一個簡單證明。

證明　當 $\lambda \ge 8$ 時，由注記知，要證明不等式 (6)，祇須證明其等價不等式 (10)，由柯西不等式，有

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\right)\left(a\sqrt{a^2+\lambda bc}+b\sqrt{b^2+\lambda ca}+c\sqrt{c^2+\lambda ab}\right)$$
$\ge (a+b+c)^2$，

即 $$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+\lambda bc}+b\sqrt{b^2+\lambda ca}+c\sqrt{c^2+\lambda ab}}，$$

又由柯西不等式，有
$$a\sqrt{a^2+\lambda bc}+b\sqrt{b^2+\lambda ca}+c\sqrt{c^2+\lambda ab} \le (a+b+c)^{\frac{1}{2}}(a^3+b^3+c^3+3\lambda abc)^{\frac{1}{2}}，$$

於是，
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^{\frac{1}{2}}(a^3+b^3+c^3+3\lambda abc)^{\frac{1}{2}}}。$$

所以，要證不等式 (10) 祇須證 $\dfrac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+3\lambda abc)^{\frac{1}{2}}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$

$$\Leftrightarrow (1+\lambda)(a+b+c)^3 \ge 9(a^3+b^3+c^3+3\lambda abc) \qquad (12)$$

而將 $(a+b+c)^3$ 展開，並應用「算術—幾何平均值不等式」有

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3\\
=\ & a^3+b^3+c^3+3(a^2b+b^2c+c^2a)+3(ab^2+bc^2+ca^2)+6abc\\
\ge\ & a^3+b^3+c^3+9\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}+9\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2}+6abc\\
=\ & a^3+b^3+c^3+24abc，
\end{aligned}$$

因此，要證不等式 (12)，祇須證

$$(1+\lambda)[a^3+b^3+c^3+24abc] \ge 9(a^3+b^3+c^3+3\lambda abc)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-8)(a^3+b^3+c^3-3abc) \ge 0 \qquad (13)$$

由 $\lambda \ge 8$ 有 $\lambda - 8 \ge 0$，又 $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$，所以不等式 (13) 成立，因此不等式 (10) 成立，從而不等式 (6) 成立。

對 $\lambda = 8$ 應用不等式 (6)，有

$\frac{a}{\sqrt{a^2+8b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8a^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+8}}=1$。因此，當 $0<\lambda<8$ 時，有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+8b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8a^2}}\geq 1,$$

即不等式 (7) 成立。

注：$\lambda\geq 8$ 是 (6) 成立的必不可少的條件，因為在證明 (13) 時用到了這一條件。同時，當 $0<\lambda<8$ 時，令 $a=t$、$b=t^2$、$c=t^3$，則當 $t\to+\infty$ 時，

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+\lambda t^2}}+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda t^2}}+\sqrt{\frac{t^4}{t^4+\lambda}}\to 1$$

，說明當 $0<\lambda<8$ 時，(6) 式左邊的最好下界是 1，而 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}>1$，所以當 $0<\lambda<8$ 時，(6) 式一般不成立。

當 $0<\lambda\leq\frac{5}{4}$ 時，作變換 $x=\frac{\lambda b^2}{a^2}$、$y=\frac{\lambda c^2}{b^2}$、$z=\frac{\lambda a^2}{c^2}$，則不等式 (8) 等價於

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leq\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{14}$$

其中 x、y、$z>0$，而且 $xyz=\lambda^3$。

不妨設 $x\leq y\leq z$，則 $\frac{\lambda^3}{z}\leq\frac{\lambda^3}{y}\leq\frac{\lambda^3}{x}\Leftrightarrow xy\leq zx\leq yz$。由 $(xy)\cdot(yz)\cdot(zx)=\lambda^6$ 知，$0<xy\leq\lambda^2\Leftrightarrow 0<\sqrt{xy}\leq\lambda\leq\frac{5}{4}<2$，首先證明，在 $0<\sqrt{xy}\leq 2$ 的條件下，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} \tag{15}$$

令 $v=\sqrt{xy}$，$t=\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$，則 $0<v\leq 2$，$\sqrt{1+x+y+v^2}\geq 1+v$，$1+x+y=t^2-v^2$，不等式 (15) 等價於

$(1+v)(2+x+y+2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y})\leq 4(1+x)(1+y)$

$\Leftrightarrow\quad (1+v)(1+t^2-v^2+2t)\leq 4t^2$

$\Leftrightarrow\quad (v-3)t^2+2(1+v)t-(v+1)(v^2-1)\leq 0$

$\Leftrightarrow\quad (v-3)(t-\frac{v^2-1}{3-v})[t-(v+1)]\leq 0$，顯然成立，（這是因為由 $0<v\leq 2$

有 $v-3<0$ 及 $\dfrac{v^2-1}{3-v} \le v+1$，由此及 $t \ge v+1$ 有 $t-(v+1) \ge 0$ 及 $t-\dfrac{v^2-1}{3-v} \ge 0$），所以不等式 (15) 成立。

應用不等式 (15) 並注意到 $z = \dfrac{\lambda^3}{xy}$，要證 (14)，祇須證

$$\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^3}{xy}}} \le \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \qquad (16)$$

令 $\sqrt{1+\sqrt{xy}} = u$，則 $1 < u \le \sqrt{1+\lambda}$，$xy = (u^2-1)^2$，不等式 (16) 等價於

$$\frac{2}{u}+\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-1)^2+\lambda^3}} \le \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \qquad (17)$$

由柯西不等式，有 $[(u^2-1)^2+\lambda^3](1+\lambda) \ge (u^2-1+\lambda^2)^2$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{(u^2-1)^2+\lambda^3}} \le \dfrac{\sqrt{1+\lambda}}{u^2-1+\lambda^2}$，因此，要證不等式 (17) 祇須證

$$\frac{2}{u}+\frac{\sqrt{1+\lambda}(u^2-1)}{u^2-1+\lambda^2} \le \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{1+\lambda}(u^2-1+\lambda^2)+(1+\lambda)u(u^2-1) \le 3u(u^2-1+\lambda^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda-2)u^3+2\sqrt{1+\lambda}\,u^2-(3\lambda^2+\lambda-2)u+2(\lambda^2-1)\sqrt{1+\lambda} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda-2)(u-\sqrt{1+\lambda})^2\left[u+\frac{2(\lambda-1)\sqrt{1+\lambda}}{\lambda-2}\right] \le 0 \qquad (18)$$

因為 $\lambda \le \dfrac{5}{4}$，所以 $\left(\dfrac{2(\lambda-1)\sqrt{1+\lambda}}{\lambda-2}\right)^2-1=\dfrac{4\lambda^2(\lambda-\frac{5}{4})}{(\lambda-2)^2} \le 0$，則 $\left|\dfrac{2(\lambda-1)\sqrt{1+\lambda}}{\lambda-2}\right| \le 1$，而 $u>1$，所以 $u+\dfrac{2(\lambda-1)\sqrt{1+\lambda}}{\lambda-2} > 0$，又 $(u-\sqrt{1+\lambda})^2 \ge 0$，$\lambda-2<0$，所以不等式 (18) 成立，故不等式 (14) 成立，從而不等式 (8) 成立。

對 $\lambda = \dfrac{5}{4}$ 應用不等式 (8)，有 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+\frac{5}{4}b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+\frac{5}{4}c^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+\frac{5}{4}a^2}} \le$

$\frac{3}{\sqrt{1+\frac{5}{4}}}=2$。因此，當 $\lambda > \frac{5}{4}$ 時，有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}<\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{5}{4}b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{5}{4}c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\frac{5}{4}a^2}}\le 2$$

即不等式 (9) 成立，故命題成立，因而定理成立。

注：$0<\lambda<\frac{5}{4}$ 是 (8) 成立的心不可少條件，在證明 (15)、(18) 都用了這一條件。同時，當 $\lambda > \frac{5}{4}$ 時，若令 $a=t$、$b=t^2$、$c=t^3$，則當 $t\to 0$ 時，$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda a^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+\lambda t^2}}+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda t^2}}+\sqrt{\frac{t^4}{t^4+\lambda}}\to 2$。因此，當 $\lambda > \frac{5}{4}$ 時，(8) 式左邊的最好上界為 2，而此時 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}<2$，由此可知當 $\lambda > \frac{5}{4}$ 時，(8) 一般不成立。

參考文獻

[1] 2004 年西部數學奧林匹克。中等數學，2005，2。

[2] 劉保乾。淺淡發現三角形不等式的 7 種模型。中學教研（數學），2000(11)。

[3] 吳善和。一個不等式猜想的證明與推廣。中學教研（數學），2001(4)。

[4] 舒金根。一個不等式的簡證、推廣及其它。中學數學月刊，2001(5)。

[5] 李建潮。一個猜想不等式的證明。中學數學教學，2001(6)。

[6] 李建潮。也談一個猜想不等式的證明。中學數學月刊，2001(12)。

[7] 安振平。一個不等式的下界估計。中學數學月刊，2001(12)。

[8] 龔浩生、宋慶。IMO42-2 的推廣。中學數學，2002(1)。

[9] M. MAZUR。問題 10944，*American Mathematical Monthly*，109(2002)，475。

[10] 蔣明斌。對一個不等式的再探討。中學教研（數學），2003(9)。

[11] 蔣明斌。IMO42 中一個不等式的新推廣。中學數學研究（南昌），2004(12)。

作者電郵：jmb8680555@tom.com