教學隨筆：500 是奇數，501 是偶數！

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

近年認識小學數學教師漸多，開始接觸到他們一些關心的問題，現舉三則分享。

500 是奇數，501 是偶數？

中國人有很多忌諱，要扭轉「福無重至，禍不單行」的「宿命」，賀禮金額必須雙數（偶數），而帛金必須單數（奇數）。一天李先生正赴喜宴，打算恭賀 500 元，正想把一張 500 元紙幣放進紅封包時，李太說：不行喔！只有一張紙幣是單數！又一回，李先生要赴喪禮，他學乖了，打算 $ 501 作帛金。可是當時沒有 $ 1 硬幣，他打算用兩個 50¢ 硬幣代替。李太太說：不行，是雙數！

500 就是 500，501 就是 501，那麼究竟 500 是否奇數？501 是否偶數？

$1 + 1 = 2$？ $0.\dot{9} = 1$？

更根本的，什麼是「＝」？筆者念大學一年班時教授就問我們，1 + 1 是否等於 2？左邊有三個符號，右邊有一個符號，怎可能相等？他還說又如兩個 50¢ 輔幣在體積上、重量上均不等於一個 $ 1 硬幣（當時投幣電話每次 $ 1，但用兩個 50¢ 就打不成了）。簡單來說，它們的數值相等吧了。

數學上，「=」有不少意思，不只局限於數字。矩陣、向量 …… 之間都會用到「=」。返回數字上的「=」。本來「=」只在實數系上定義。故此，在某個意義上「$\infty + \infty = \infty$」、「$\infty \times \infty = \infty$」等是沒有意義的。因為「$\infty$」不是實數系的一元。不過，「$\infty + \infty = \infty$」其實是如下定理之簡寫：

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$，且定義 $c_n = a_n + b_n$（其中 $n = 1, 2, \ldots$），則有 $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$。

由於縱有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$，而若定義 $d_n = a_n - b_n$，我們不肯定 $\lim_{n\to\infty} d_n$ 的趨勢，故此我們不可以寫「$\infty - \infty = 0$」。

在這個背景下，$0.\dot{9}$ 是否等於 1 其實就很清楚了。它亦與極限有關。在某個意義上，0.999… 本來不是數字、不是實數系的一元。它其實也是一個數列：

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.9 \\ t_2 &= 0.99 \\ t_3 &= 0.999 \\ \ldots &= \ldots \\ t_n &= 0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ 個}} \end{aligned}$$

顯然，對於任何 n，t 均不等於 1 。但 $0.\dot{9} = 1$ 其實可看作 $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ 的簡寫。亦即對於任何 n，雖然 $0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ 個}} \neq 1$，但 $\lim_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ 個}} = 1$。

曲線可以平行嗎？

談到「=」，就想到平行線。首先擬定「=」的 R. Recorde（1510 – 1558）說明他何以用這個符號就是因為「沒有兩件事比一對平行線更相等」。最近不少老師問曲線可以平行嗎？這可能是大家在教學上往往用路軌、跑道等引入，而路軌與跑道是會轉彎的。

但「曲線可以平行嗎？」可以有兩層意義。首先，現行一般的討論均是論平行線的，故此在一般的認識（起碼在中小學階段）只有直線才算平行。不過我們仍可以問，我們可以在曲線當中定義平行嗎？即將直線之平行關係延伸到曲線。

直線的平行性起碼有三個意義。一、兩線永不相交，二、一線是另一的平移，三、斜率相等。

若果我們真的定義曲線上的平行，「不相交」顯然沒有意義。而若用平移，這與直觀有所出入（畫一畫 $y = \sin x$ 及 $y = 1 + \sin x$ 或平移圖形就知道了）另一個方向就是利用同心性（同心圓）等曲率去處理，然而不少曲線沒有任何一個小段是一個圓弧 ……

所以雖然我們確可以找到平行曲線之定義（如 Leibniz 定義為一曲線之任一法線均為另一曲線之法線，見 http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_curves，亦有以包絡去定義者，見 www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/curves/Definitions2html#Parallel_Curves，又見：http://mathworld.wolfram.com/ParallelCurves.html。可見它不如平行線之直接）。

從這些事例，筆者希望帶出一個訊息，定義雖然重要，有其遵從之必要。但它往往仍屬一種共識。在教學上，定義背後的理念尤其重要，以小心避免喧賓奪主。

甚麼是梯形？

500 當然不是奇數，501 也不是偶數。上面的問題出自單位之換算：501 元變了 5010 角，「奇數」頓變成「偶數」（嚴格來說，以數字而言，$501 \neq 5010$，「元」與「角」亦非數系成員，故無「=」可言）。其實可以看到，度量（包括貨幣）不純粹是數學而是數學與現實世界的橋樑（即以對現實世界作數學建模），所以才出現一些無可避免的「含混」性。

我們可以用類似的角度去考慮「$\text{cm}^2 / \text{cm} = \text{cm}$？」或「$\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$？」的問題。這是經常用作核對計算有否做錯的方法。當然理論上 cm 不是實數，不可作 × 或 ÷。但其實這是利用實數系對長度和面積的「建模」。甚至理論上若我們定義邊長 1 cm 正方形的面積為 $k\,\text{cm}^2$（$k > 0$），這種面積定義依舊成立（仍然是一個「測度」(*)）。故此，我們在建模過程中同時把 cm 納進 ×、÷ 系統，那又如何？

又例如不少小學生認為梯形一定如圖一那樣。要把圖二中的圖形接受為梯形要一段時間適應，原因是在他們的認知中，沒有這樣的梯子。然而學生的觀念沒有「錯」。在視覺認知上，這些圖形確實是截然不同的東西。我們甚至可以說，數學上梯形的定義是經人工修飾的，不自然地界定的。然而數學教學不也就是引領學生走過這條「由具體到抽象，由直觀到清楚界定」的「數學化」之路嗎？

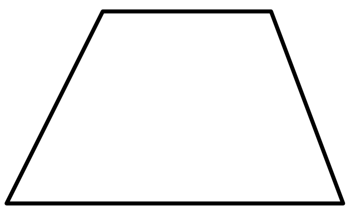

圖 一

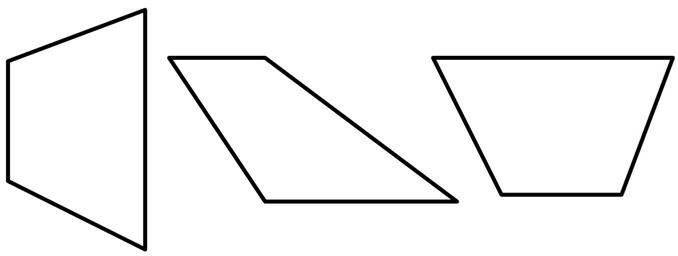

圖 二

作者電郵：nywong@cuhk.edu.hk

(*) 「測度」蘊含以下性質（公理）：(1) 所有區域的測度均 ≥ 0；(2) 全等（congruent）區域的測度相等；(3) 不相交（即不重疊）的兩個區域之測度可相加。