# 《九章算術》的盈不足術

文耀光
香港教育學院數社科技學系

《九章算術》的「盈不足」章，共有二十題，它的第一題是：「今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？（答曰：七人，物價五十三。）」如果用現代的數學符號，這類問題可以一般地表述為：「若每人出 $a_1$，則盈 $b_1$；若每人出 $a_2$，則不足 $b_2$。問人數 $a$ 和物價 $b$ 各多少？」它的解可以用以下的公式計算，其中 $x$ 表示平均每人所應出的錢數：

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 + b_2} & \text{......(1)} \\ a = \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} & \text{......(2)} \\ b = \dfrac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2} & \text{......(3)} \end{cases}$$

根據公式 (2)、(3)，容易算出「盈不足」章第一題所給出的答案。我們也許會問，這樣的公式是怎樣得出來的？根據劉徽的注，想法大致是這樣：「按盈者，謂之朓（指有餘）；不足者，謂之朒（指不足）。所出率謂之假令。盈朒維乘（指交叉相乘）兩設者，欲為齊同之意。據『共買物，人出八，盈三；人出七，不足四』，齊其假令，同其盈朒，盈朒俱十二。通計齊則不盈不朒之正數，故可併以為實（指分子）。併盈不足為法（指分母）。齊之三十二者，是四假令，有盈十二。齊之二十一者，是三假令，亦朒十二。併七假令合為一實，故併三、四為法。」

劉徽的意思是說，如果要計算平均每人應出的錢數 $x$，要設法令盈與不足相同（稱為「齊同」），讓兩數互相抵消。怎樣進行呢？可以這樣思考：「原本每人出錢 $a_1$ 一起買貨一件，現改為一起買 $b_2$ 件，於是每人出錢 $a_1b_2$，盈錢 $b_1b_2$。另外，原本每人出錢 $a_2$ 去一起買貨一件，現改為一起買 $b_1$ 件，於是每人出錢 $a_2b_1$，不足錢 $b_1b_2$。換言之，如果共買貨 $b_1 + b_2$ 件，每人出錢

$a_1b_2+a_2b_1$，便沒有盈，也沒有不足。即是平均每人出錢 $\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$ 便可一起買貨一件，故有 (1) 式。」

那麼人數是怎樣算出來的？由於每人兩次所出錢的差是 $a_1 - a_2$，而 $a$ 個人共出錢的差是 $b_1 - (-b_2) = b_1 + b_2$，故 $a \times (a_1 - a_2) = b_1 + b_2$，即 $a = \frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$，此是 (2) 式。有了 (1) 式和 (2) 式，物價便容易計算出來。因為只要把平均每人所出的錢數 $x$，乘以人數 $a$，便是物價 $b$，故有 (3) 式。

當然，如果只是求解上述「盈不足」章的第一題，只要先解出人數 $a = \frac{3+4}{8-7} = 7$（人），再根據已知條件算出 $b = 8 \times 7 - 3 = 53$（錢），既不須算出 $x$，也不須引用 (3) 式。這是抓住了所出率的差與盈不足的差之間的關係，作為解題的策略。譬如，在「盈不足」章中的幾類典型問題，都可以運用這種解題策略。

<u>第一類問題</u>（盈不足章第 2 題，一盈、一不足）：「今有共買雞，人出九，盈十一；人出六，不足十六。問人數、雞價各幾何？（答曰：九人，雞價七十。）」

<u>第二類問題</u>（第 5 題，兩盈）：「今有共買金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。問人數、金價各幾何？（答曰：三十三人，金價九千八百。）」

<u>第三類問題</u>（第 6 題，兩不足）：「今有共買羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三。問人數、羊價各幾何？（答曰：二十一人，羊價一百五十。）」

<u>第四類問題</u>（第 7 題，一盈、一適足）：「今有共買豕，人出一百，盈一百；人出九十，適足。問人數、豕價各幾何？（答曰：一十人，豕價九百。）」

<u>第五類問題</u>（第 8 題，一不足、一適足）：「今有共買犬，人出五，不足九十；人出五十，適足。問人數、犬價各幾何？（答曰：二人，犬價一百。）」

在盈不足章中，除了有幾個明顯是盈虧問題外，其餘的原非真正的盈虧問題，不過仍然可以用盈不足術求解。例如：

（盈不足章第 13 題）「今有醇酒（指濃酒）一斗，直錢五十，行酒（指淡酒）一斗，直錢一十。今將錢三十，得酒二斗。問醇、行酒各得幾何？（答

曰：醇酒二升半，行酒一斗七升半。）」[1]

《九章算術》的解法是：「假令醇酒五升，行酒一斗五升，有餘一十；令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。」這是運用了兩次假設（名為「雙設法」），把原問題化成盈不足問題去求解。換言之，將 $a_1 = 5$，$b_1 = 10$，$a_2 = 2$，$b_2 = 2$ 代入 (1) 式，可得醇酒量為 2.5 升；再用 2 斗減去醇酒量可得行酒量為 17.5 升。[2]

在歐洲的中世紀，當求解 $px - q = 0$ 這類方程時，會用到「雙設法」，即是先設 $a_1$ 與 $a_2$ 為 $x$ 的兩個假設值，而 $b_1$ 與 $b_2$ 滿足 $a_1 p - q = b_1$ 和 $a_2 p - q = b_2$。由此可得 $p$、$q$ 與 $x$ 之值如下：

$$\begin{cases} p = \dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \\ q = \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2} \\ x = \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2} \end{cases}$$

此法是當時歐洲解決同類問題的一種主要方法，亦稱為「雙假位法」、「增損術」、「盈朒術」或「契丹算法」。在 13 世紀斐波那契（Fibonacci，1170 – 1250）的《算盤書》中，曾明確指出此法是源自中國的盈不足術，後經阿拉伯傳入歐洲。在明朝之後，當不少中國的數學著作與算法幾近失傳，至李之藻（1565 – 1630）與利瑪竇（Matteo Ricci，1552 – 1610）合譯的《同文算指》（1613 年出版）面世，盈不足術（即雙設法）才又得以重現中國，可謂一頁滄桑！

## 參考書目

李繼閔（1998）。《九章算術》導讀與譯注。陝西：陝西科學技術出版社。

李信明（1998）。中國數學五千年。台北：台灣書店。

杜石然（2003）。數學、歷史、社會。遼寧：遼寧教育出版社。

李迪（2004）。中國數學通史（明清卷）。江蘇：江蘇教育出版社。

作者電郵： ykman@ied.edu.hk

1　註：一斗等於十升。

2　當然也可用類似方法，先用盈不足術求行酒量，再用減法求醇酒量。