化圓為方 —— 球體體積與牟合方蓋

柯志明

引言

一般第三學習階段的數學教科書，都沒有提及球體體積公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 的由來，最多只是建議一些實驗活動讓學生驗證公式（陳、梁、郭，2001，61 頁）。一般都認為球體體積的推導必須用到微積分，但其實有一些球體體積公式的證明是可以向低年級學生講解的。本文旨在介紹兩個低年級學生也能明白的球體體積公式證明，並比較它們之間的關係。

本文圖片均以 Cabri 3D 製作，並能以不同角度觀察及動態地展示。讀者可先到 Cabri 的網頁 www.cabri.com 下載及安裝 Cabri 3D 的試用版，然後到 http://hk.geocities.com/orchiming/volsphere 下載這些動態圖片的簡報。

西方的證明

圖一的證明來自 Eves（1990，388 – 389 頁）。書中並無明確提及那一位數學家最先提出這個證明，但有網頁指出這個證明源自希臘 [1]。

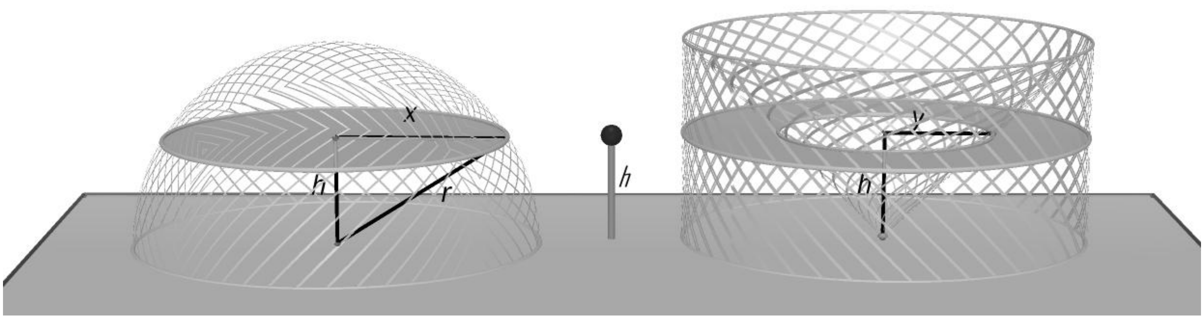


圖 一

考慮一個半球體，及一個相同底及高的圓柱體，並從圓柱體挖走一個相同高度的倒轉直立圓錐。用畢氏定理可以得出 $x^2 = r^2 - h^2$。所以在高度 h，

$$\text{半球體的橫切面面積} = \pi x^2 = \pi(r^2 - h^2)$$

$$\text{右邊立體的橫切面面積} = \pi r^2 - \pi y^2 = \pi r^2 - \pi h^2$$

1 http://mathcentral.uregina.ca/QQ/database/QQ.09.01/rahul1.html

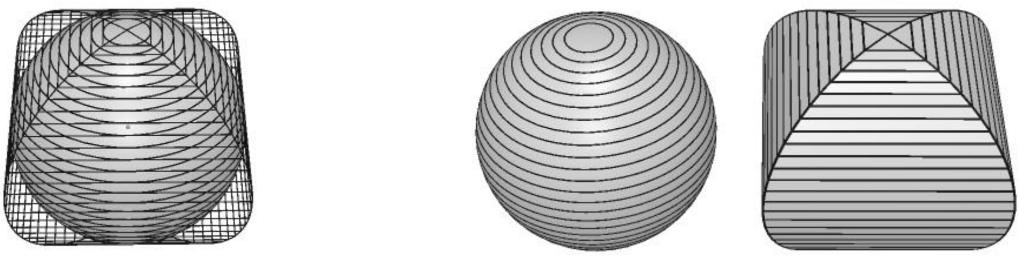
所以兩個立體於任何一個高度的橫切面面積相等。我們可以想像一個立體是由一疊薄紙所組成，而每張紙就是一個橫切面。若果兩疊紙每一張的面積都相等，而紙張的數目又一樣（高度相等），那麼兩疊紙的體積，亦即是兩個立體的體積，也應該相等了。所以，

$$
\begin{aligned}
\text{半球體體積} &= \text{圓柱體體積} - \text{圓錐體積} \\
&= \pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r \\
&= \frac{2}{3}\pi r^2
\end{aligned}
$$

所以，球體的體積是 $\frac{4}{3}\pi r^3$。

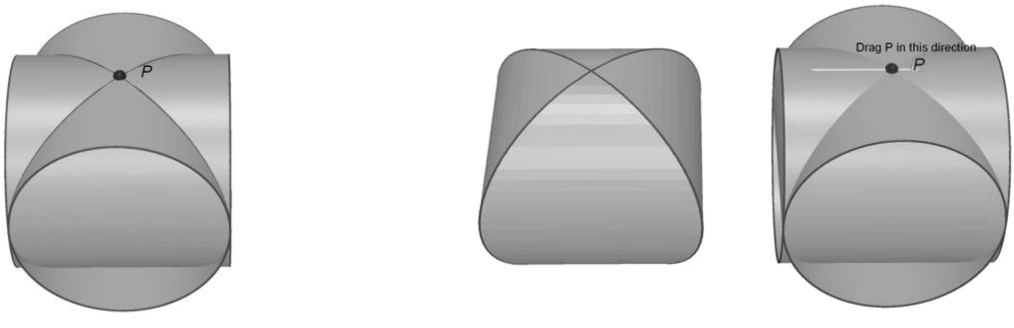
中國的證明

為了求出球體的體積，三國時期的劉徽考慮一個稱為「牟合方蓋」的立體（蕭，1993）。首先想像球體由一疊圓形所組成，然後每個圓形被它的外接正方形代替（圖二(a)），這樣得出的立體就是牟合方蓋了（圖二(b)）。牟合方蓋也可以看成是兩個大小一樣垂直相交的圓柱體（圖三(a)）的重疊部份（圖三(b)）。



(a) (b)

圖 二



(a) (b)

圖 三

由於球體和牟合方蓋於任何一個高度的橫切面面積比率都是 $\pi : 4$，而且它們的高度相等，所以它們的體積比率也是 $\pi : 4$。若果能夠求出牟合方蓋的體積，球體的體積也可以得出來了。

後來南北朝的數學家祖沖之、祖暅父子用以下的方法求出了牟合方蓋的體積：考慮八分之一個牟合方蓋，並把它放在一個邊長等於球體半徑 r 的正方體內。祖氏父子考慮正方體和八分一牟合方蓋之間的空間，及另一個有相同的底和高度的倒轉方錐體（見圖四）。這個方錐體中國古時稱為「陽馬」。

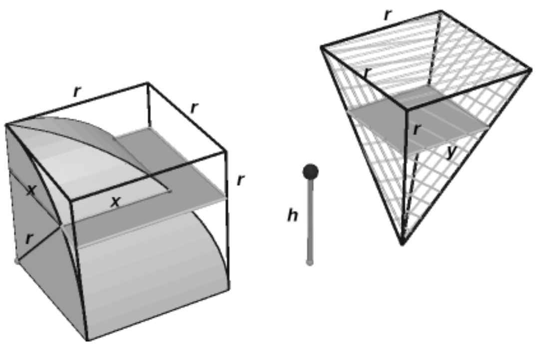


圖　四

如圖四，考慮兩個立體於高度 h 的橫切面的面積。由畢氏定理，$x^2 = r^2 - h^2$，所以，

$$\text{左邊的橫切面面積} = r^2 - x^2 = r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$$

$$\text{右邊的橫切面面積} = y^2 = h^2$$

所以，兩個橫切面面積相等，而立方和八分一牟合方蓋之間的空間體積也該等於「陽馬」的體積了。剛好三個「陽馬」可合成一個正方體（圖五），所以它體積是 $\frac{1}{3}r^3$。

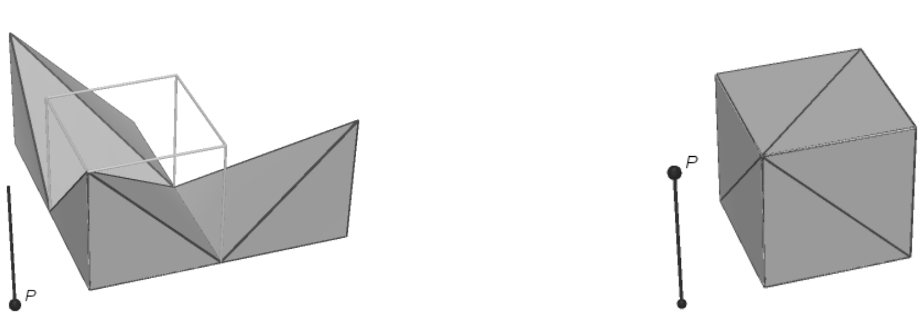


圖　五

$$\text{所以，} r^3 - \frac{1}{8}\text{牟合方蓋體積} = \frac{1}{3}r^3$$

$$\text{牟合方蓋體積} = \frac{16}{3}r^3$$

因為球體與牟合方蓋的體積比率為 $\pi : 4$，所以

$$\text{球體體積} = \frac{\pi}{4} \times \text{牟合方蓋體積}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

存異求同

比較以上兩個證明，似乎第一個證明比較簡潔易明。中國的證明雖然十分巧妙，但一來牟合方蓋這個立體本身比較特別，二來證明比較轉折（不是直接求牟合方蓋的體積，而是求牟合方蓋以外的空間的體積），所以以前我任教中三時也只用第一個證明向學生解釋球體體積公式，而學生也大致明白。

細觀以上兩個證明，其實關鍵的步驟部份十分類似：大家都是引入一個倒轉錐體，然後比較橫切面。於是突然靈機一觸：何不像圖一那樣直接計算牟合方蓋的體積？於是筆者嘗試用祖冲之及祖暅的意念，得出圖六的證明：

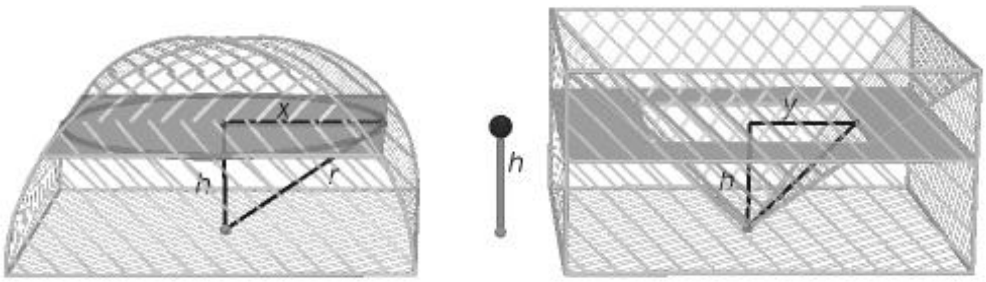


圖　六

考慮半個牟合方蓋，及一個有相同底及高、但中間被挖走了一個倒轉正方錐的正方柱體。與前述的證明一樣，兩個立體的橫切面面積相同，所以體積也相同，所以：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{牟合方蓋} &= \text{正方柱體體積} - \text{正方錐體積} \\
&= (2r)^2 \times r - \frac{1}{3}(2r)^2 \times r \\
&= \frac{8}{3}r^3
\end{aligned}
$$

所以牟合方蓋的體積為 $\frac{16}{3}r^3$，而球體的體積則等於 $\frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$。

這個證明美中不足的地方是用到了錐體體積的公式，這是祖氏父子的方法所不需的。為了保留祖氏方法的精髓，可以只考慮牟合方蓋的八分之一，先證明八分之一個牟合方蓋與正方體減去一個正方錐的體積相等（圖七），再展示這立體的體積等於正方體的三分之二（圖八），這樣便可不需錐體體積公式而求得牟合方蓋的體積，從而得出球體的體積了。

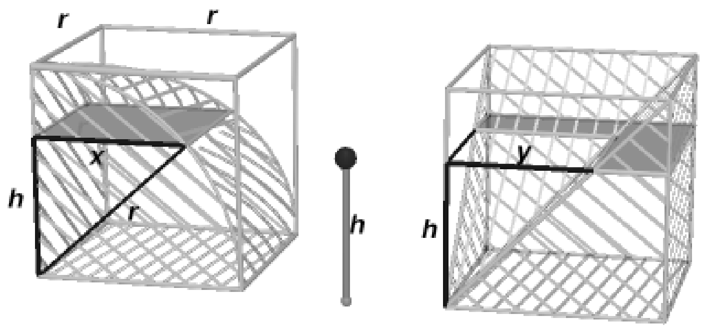


圖　七

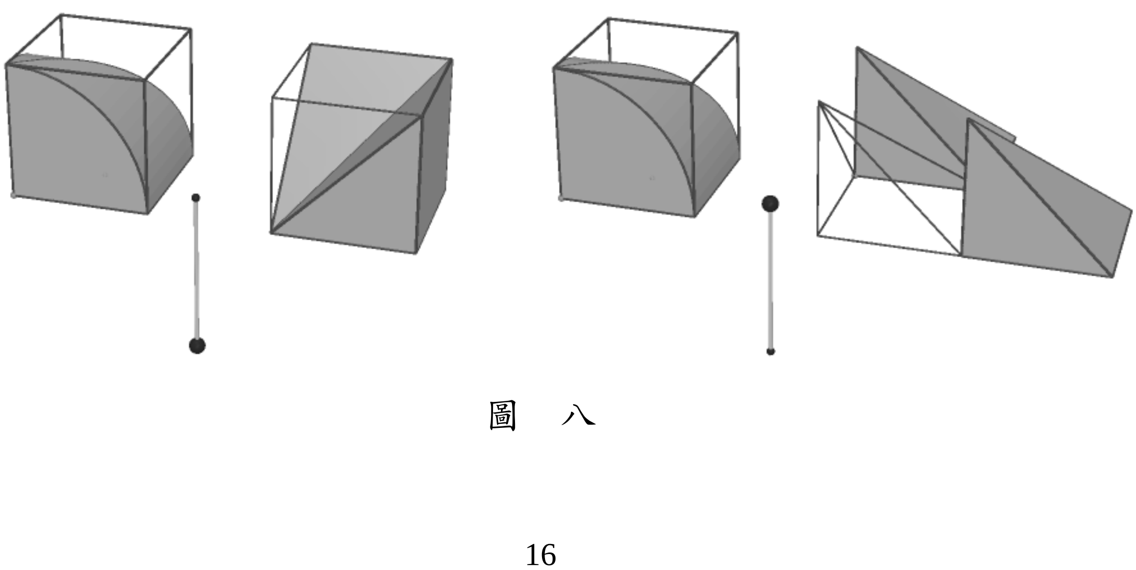


圖　八

如果我們比較圖一和圖六，基本上可以看到希臘和中國的證明意念上是很相近的。惟一分別是希臘數學家直接考慮球體的圓形橫切面，而中國數學家先「化圓為方」，將圓形橫切面化成正方形，然後再作考慮。不知這是否可以作為一些古代中國人所主張的「中國人品性方正、外國人品性圓滑」（錢，1990）的一個例子？（一笑）

結語

本文介紹了兩個低年級學生也能明白的球體體積證明。筆者認為，這兩個證明能夠做到劉徽所謂「約而能周，通而不黷」，即簡單而全面、通俗卻不隨便（蕭，1981）的標準，值得向學生講解，因為 “that which is provable ought not to be believed without proof ”（Dedekind 語，見 Stirling，1987，16 頁）。

老師亦可考慮將講解完第一個證明後，將中國的證明改寫為一個 historically motivated problem（Tzanakis and Arcavi，2000），以加深學生對這個課題的理解，並讓他們欣賞一下中國古代的數學成就。

參考書目

陳夢熊、梁瑞華、郭佩雯（2001）。《數學新里程中三下》。香港：中大出版社。

錢鍾書（1990）。《圍城》。北京：人民文學出版社。

蕭文强（1981）。數學教學上如何 “古為今用”。載於梁鑑添、蕭文强等，《抖擻文選：數學教學論叢》，93 – 96 頁。香港：商務印書館。

蕭文强（1993）。微積分的故事。載於蕭文强，《1, 2, 3, ……以外 — 數學奇趣錄》，20 – 44 頁。香港：三聯書店有限公司。

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics (Sixth Ed.)*. Philadelphia: Saunders College Publishing.

Stirling, D. (1987). *Mathematical analysis: a fundamental and straight forward approach*. New York: Ellis Horwood.

Tzanakis, C., Arcavi, A. (2000). ‘Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey’, in J. Fauvel and J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, pp. 201 – 240. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

作者電郵：orchiming@gmail.com