一個幾何證明的謬誤

馮德華
伊利沙伯中學舊生會中學

在一次的公開考試中，有一條類似以下的數學題目：

已知 $ABCD$ 為一平行四邊形（見圖一），對角線 AC 與對角線 BD 交於 E。證明 ΔABC 與 ΔCDA 全等。

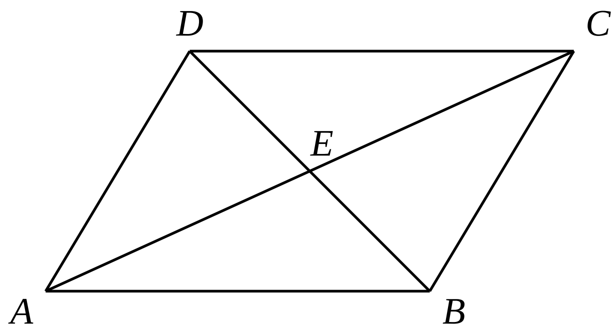

圖 一

有些學生利用以下證明方法：

證明一

$AB = CD$ （平行四邊形對邊）

$BC = DA$ （平行四邊形對邊）

$AC = CA$ （公共邊）

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta CDA$ （S.S.S.）

證明二

$AB = CD$ （平行四邊形對邊）

$BC = DA$ （平行四邊形對邊）

$\angle ABC = \angle CDA$ （平行四邊形對角）

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta CDA$ （S.A.S.）

他們正確嗎？請大家先決定證明一及證明二是否正確，才繼續閱讀本文。

筆者用該題的主幹，再提出另一條題目：

已知 $ABCD$ 為一平行四邊形（見圖一），對角線 AC 與對角線 BD 交於 E。證明 $AB = CD$。

證明三　因 $ABCD$ 為一平行四邊形，
$\therefore$ $AB = CD$　（平行四邊形性質）

證明四　因 ΔABC 與 ΔCDA 全等，
$\therefore$ $AB = CD$　（全等三角形的對應邊）

在證明三中，學生未有對 $AB = CD$ 作出過任何證明，只有提出「平行四邊形性質」。是否提出「平行四邊形性質」的就算正證明正確呢？又甚麼是「平行四邊形性質」呢？

在證明四中，學生指出「因 ΔABC 與 ΔCDA 全等」，所以用「全等三角形的對應邊」的「理由」，就可以證明 $AB = DC$，對嗎？難道不需先證明「ΔABC 與 ΔCDA 是全等」的嗎？

有些老師覺得這只是在校內評分時「手嚴手鬆」的問題，況且很多教科書都這樣記載，會考評卷時也不會有太多要求，學生又有如此「好」表現，就接受這樣證明吧。

筆者對此不敢苟同。因為學生犯的是「循環」論證的謬誤，而「循環」論證正是「邏輯證明」的大忌，筆者試舉一例說明甚麼是「循環」論證：

甲問乙：　你住在那裡？
乙答：　我住在丙家對面。
甲再問乙：　那麼丙住在那裡？
乙答：　丙住在我家對面。
甲再問乙：　那麼你住在那裡？
乙答：　我住在丙家對面。
甲再問乙：　那麼丙住在那裡？
乙答：　丙住在我家對面。
…　……

甲與乙答問的對話就是一個「循環」答問，乙從未對甲作出一個有「意義」或有「答案」的回答，最後甲仍然不知道乙住在那裡。以上的證明三及證明四就像甲與乙的答問般，學生從未對該題目的「證明」作「回答」，

我們怎能接受這樣的「證明」呢？

再看一例：

已知 $ABCD$ 為一平行四邊形（見圖一），對角線 AC 與對角線 BD 交於 E。證明 ΔABC 與 ΔCDA 全等。

證明五　　因 $ABCD$ 為一平行四邊形，

$\therefore$　　$\Delta ABC \cong \Delta CDA$　　（平行四邊形性質）

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ 的確是「平行四邊形性質」，但你會接受證明五的「證明」嗎？

以下是該題目的正確證明：

已知 $ABCD$ 為一平行四邊形（見圖一），對角線 AC 與對角線 BD 交於 E。證明 ΔABC 與 ΔCDA 全等。

證明六

	$\angle CAB = \angle ACD$	（內錯角，AB // DC）
	$\angle ACB = \angle CAD$	（內錯角，AD // BC）
	$AC = CA$	（公共邊）
$\therefore$	$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	（A.S.A.）

經過證明 ΔABC 與 ΔCDA 全等之後，我們得出以下性質：

$\angle ABC = \angle CDA$	（全等三角形的對應角） 即（平行四邊形對角相等）
$AB = CD$	（全等三角形的對應邊）
$BC = DA$	（全等三角形的對應邊） 即（平行四邊形對邊相等）

「平行四邊形」是一個有兩對邊平行的四邊形，經嚴格證明得到 ΔABC 與 ΔCDA 全等後，才有「平行四邊形對角相等」、「平行四邊形對邊相等」、「平行四邊形性質」等推論。我們不能本末倒置、倒果為因用這些「性質」或「推論」去證明 ΔABC 與 ΔCDA 是全等的，或者用作證明某四邊形是一個「平行四邊形」的根據。證明一及證明二就是犯了「循環」論證的謬誤。這不是老師在校內評分時「手嚴手鬆」的不同，而是一個「對與錯」的嚴重問題。

作者電郵：twfung@alumni.cuhk.net