如何利用「概念改變」於數學教學

彭可兒
仁濟醫院羅陳楚思中學

真正的數學教學，是通過數學知識促進學生數學思維活動的教學（王子興等，1999），換言之，當中最重視的並非知識的本身，而是學生的內部心理認知過程。在教授數學時，老師可透過不同的策略，好好引導學生，讓他們達致「概念改變」（conceptual change），進行「有意義的學習」（meaningful learning）（Driscoll，2000）。本文的目的，是討論筆者如何應用概念改變策略於數學教學中。

掌握學生「已有知識」與「原有認知結構」

Driver 等人（1995）認為如果不考慮學生的「已有知識」（prior knowledge），便無法促進概念改變，故在教學上不僅應考慮學科的內容，同時也應顧及學生的「已有知識」。例如在教授三角形的面積時，筆者必先要了解學生對「三角形」、「底」、「高」、「長度」、「單位」等的認知，這些都是建構「認知結構」（cognitive structure）（Driscoll，2000）的元素，欠缺這些「已有知識」的話，即使筆者使用數格子、切割長方形、推導公式或任何其他教學展示，同學都沒可能理解到「三角形的面積 = 底 × 高 ÷2」的，因為他們欠缺相關的材料去組織一個認知結構。

相似地，筆者對學生「原有認知結構」（existing cognitive structure）的了解亦是相當重要，例如在教授「函數變換」（transformation of function）時，如果筆者已事先知道同學對「正弦函數」（sine function）和「餘弦函數」（cosine function）有相關的認知結構，便可以此作為基礎，引入「函數變換」，形成「新認知結構」（new cognitive structure）（圖一）。這樣不但可幫助學生建構缺少的概念（兩個函數的變換），而且可以澄清模糊的概念（兩個函數之間的關係），強化概念改變的穩定性。

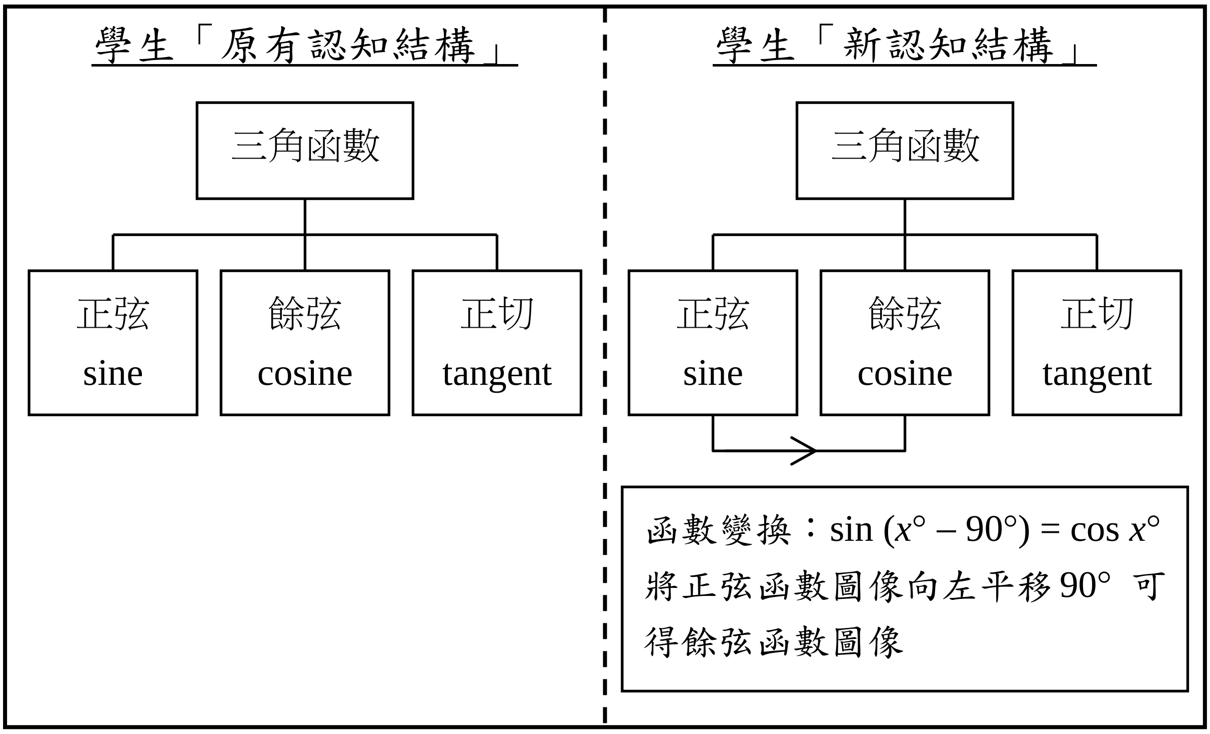

圖　一

幫助學生作概念「同化」

概念「同化」（assimilation）是指把新知識納入「原有認知結構」，使其擴充，從而形成「新認知結構」，亦即圖一的例子。在筆者的數學教學中，幫助學生「同化」概念的具體策略，是從概念之間的從屬關係入手，突出所要教授的概念的關鍵屬性，然後利用例證將所要教授的概念具體地展現出來（Posner 等，1982）。

例如向初中學生教授菱形的概念時，由於學生本身應學會「菱形是 …… 的四邊形」，所以筆者會先了解他們對四邊形的「原有認知結構」。當中的具體策略是要學生指出何謂四邊形，然後引導學生指出「菱形是四邊形的其中一種」、「菱形從屬於四邊形」，繼而從四邊形的定義著手，要學生給出四邊形的其他例子，這時他們很可能會給出正方形、長方形、梯形、平行四邊形、任意四邊形等（圖二）。

這時，筆者才引入新元素：「平行」、「邊長」與「夾角」，引導學生利用它們理解四邊形的分類，讓上述三個新元素納入學生的「原有認知結構」，從而理解菱形的數學定義與概念，而不是死記硬背「菱形為兩對對邊平行且四邊等長的四邊形」。筆者會先從「平行」著手，要學生將以上四邊

形的例子按「兩對對邊平行」、「一對對邊平行」和「沒有對邊平行」分類（圖三），然後用「邊長」與「夾角」將菱形、正方形、長方形、平行四邊形的關係弄清（圖四）。由此，「平行」、「邊長」與「夾角」等新元素令學生的「原有認知結構」得以擴充，形成一個結構更複雜而清晰的「新認知結構」；在同學回答問題的同時，筆者會在黑板上逐步將圖二化為圖三、再將圖三化為圖四，這個過程除了能借助「外在」（explicit）表徵減輕學生在建構「新認知結構」時的「認知負荷」（cognitive load），亦是一個師生一起建立「概念圖」（concept map）的過程。最後，筆者會展示一系列的平面圖形，讓學生辨別，令他們的學習更為具體與實在。

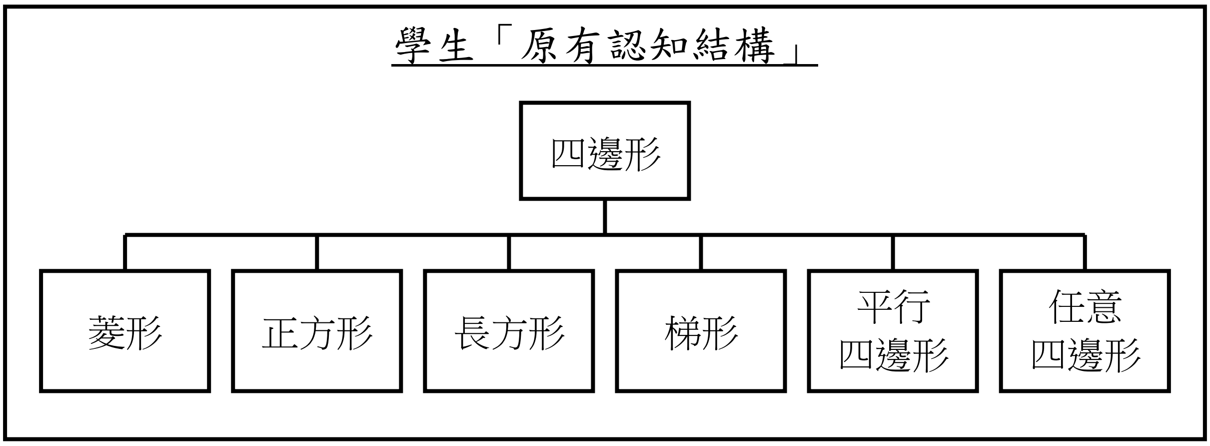

圖　二

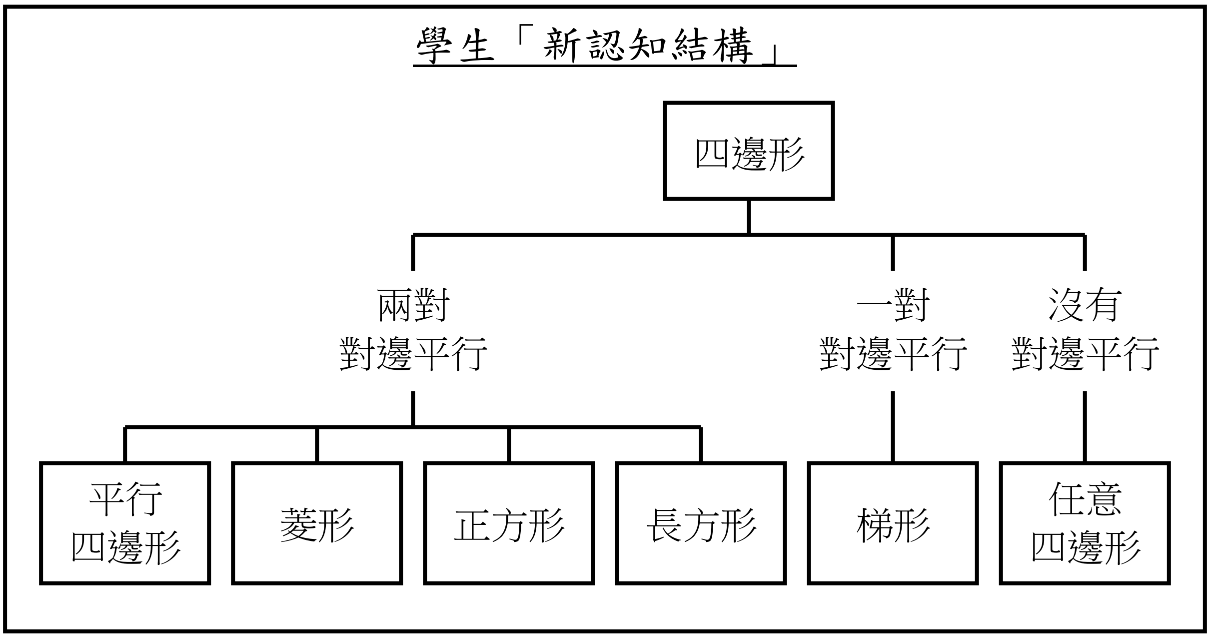

圖　三

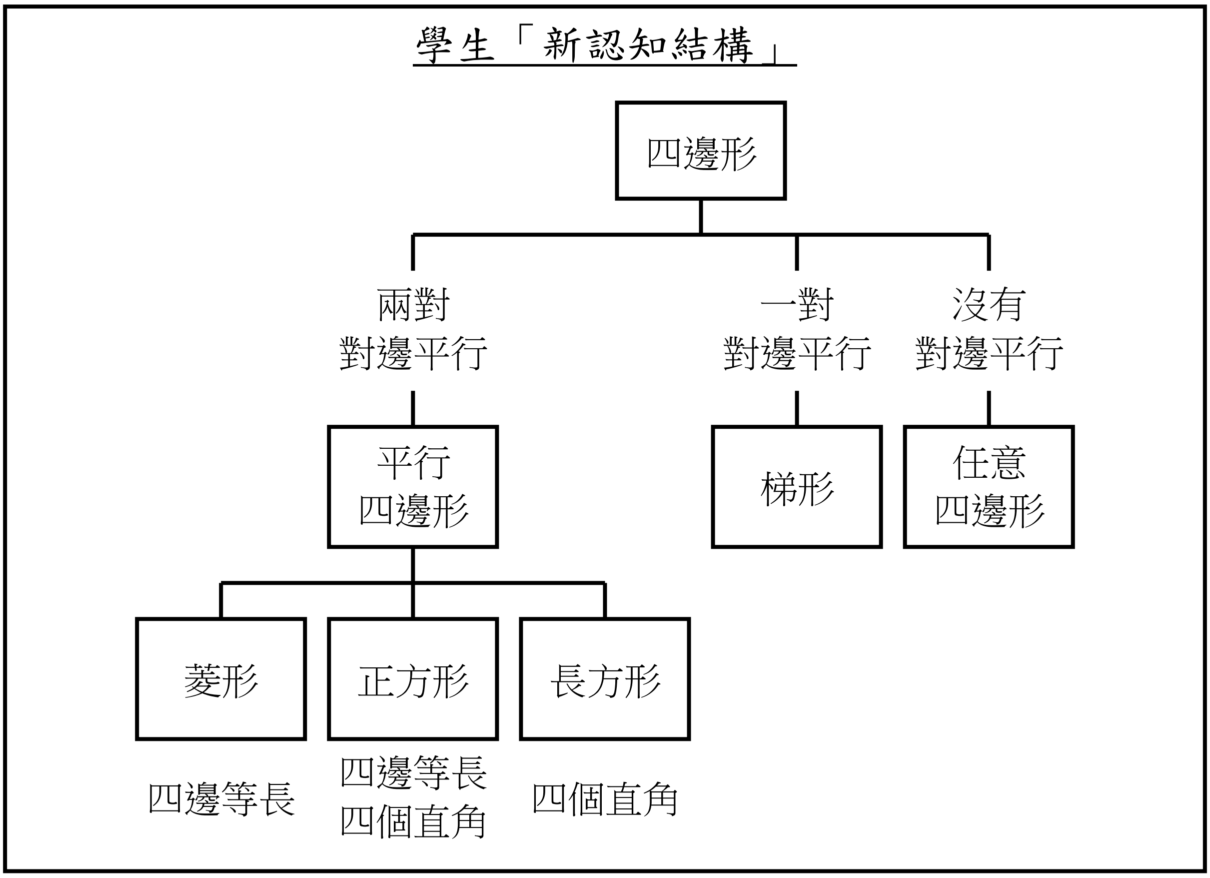

圖　四

幫助學生作概念「順應」

當學生的「原有認知結構」不足以「同化」新概念時，筆者便要幫助學生調整或改變「原有認知結構」，以便接納新的概念。例如，對於中一學生，由於他們在小學時長期接觸自然數，在日常生活也常常使用自然數，他們的數概念的「原有認知結構」難以吸納正、負數概念，因此筆者必須幫助學生調整或改變「原有認知結構」，以便接納正、負數概念。具體來說，筆者會先幫助學生建立新的觀念，指出現實世界中存在著大量具有相反意義的量，例如賺 5 元與蝕 5 元；然後通過提問讓學生意識到，要清楚地區分這兩種不同的量，了解兩者之間的關係，只靠自然數是不足夠的；繼而指出，如果要將其中一種量定為正（例如賺 5 元），則另一量就為負（例如蝕 5 元）；前者用正號「+」表示，後者用「−」；最後，再配以數線具體地展示正、負數的關係（Vlassis，2004）。

現又以求解「二次方程」（quadratic equation）作為另一例子。對於初中學生來說，除了利用畢氏定理求直角三角形的其中一條邊會遇上 $x^2 = k$ 形式的「二次方程」外，他們所接觸的方程絕大部份都是「線性方程」（linear equation），這可透過移項求得方程的唯一一個根。因此，筆者發現不少初踏入高中階段的學生總喜歡將已經化簡成「一般式」（general form）之「二次方程」的常數項移至方程的另一邊（$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 10$），這是因為他們只使用求解「線性方程」的策略求解「二次方程」；筆者亦發現不少高中學生未能內化「一條方程可求得多於一個根」，或是只流於機械式運作的層面，所以在處理涉及「二次方程」的應用題和聯立方程時，常常只給出一組解，因為這組解已足以滿足他們的心理平衡，而這種心理平衡是經由回溯求解「線性方程」的經歷獲得的。

由於「線性方程」無論在求解策略和根之數目兩方面都與「二次方程」的大為相異，所以初踏入高中階段的學生對「解方程」的「原有認知結構」（圖五）並不足以接納「二次方程」的種種特性，換句話說，概念「同化」不成，必須幫助學生作概念「順應」（accommodation）。

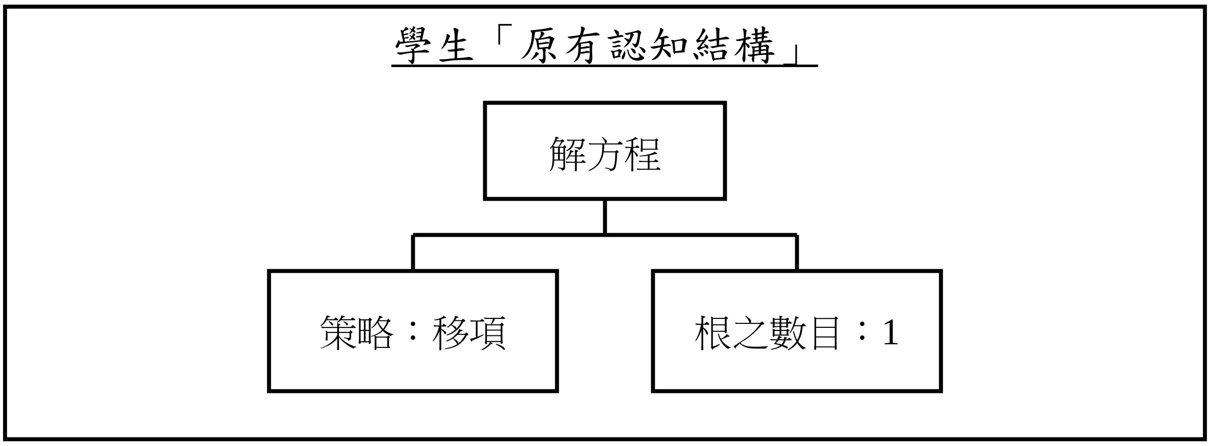

圖　五

筆者會利用一系列的題目，幫助學生探索「二次方程」的部份特性，以及比較「二次方程」與「線性方程」的相異之處。題目的設計利用了多種「變式」（祁永華等，2005），但由於這並不是本文的重點，故在此不作詳述。另外，這個教學設計旨在引導學生思考，而非學習求解「二次方程」的列算，因此筆者只會要求學生將所思所想草書在白紙上。

<u>步驟一：利用試誤法求解「二次方程」</u>

這個步驟的目的有三個：一是要讓學生意識求解「線性方程」的策略並不足以求得「二次方程」的根（比較 a 和 b）；二是讓學生認識「二次方程」可以有兩個根（完成 b 後）；三是讓學生體會試誤法的低效率（完成

b 後）。題目的特點是每題的 (a) 和 (b) 分別是「線性方程」和「二次方程」，兩者具有相同的常數項。過程中，若同學作答 (1b) 感到束手無策時，筆者會建議學生利用試誤法，將估計的 x 值代入方程驗算。

習題：

1. (a) 解 $x + 8 = 0$ (b) 解 $x^2 - 6x + 8 = 0$
2. (a) 解 $x - 10 = 0$ (b) 解 $x^2 + 3x - 10 = 0$
3. (a) 解 $x + 6 = 0$ (b) 解 $x^2 + 5x + 6 = 0$

答案：

1. (a) $x = -8$ (b) $x = 2$ 或 4
2. (a) $x = 10$ (b) $x = 2$ 或 -5
3. (a) $x = -6$ (b) $x = -2$ 或 -3

<u>步驟二：自製「二次方程」及求解</u>

這個步驟的目的是要讓學生聯繫因式分解與求解「二次方程」的關係（比較 a 和 b）。題目的特點是每題的 (b) 乃是由 (a) 的答案所構成。完成後，即使筆者沒有提示，同學亦很容易發現 (a) 與 (b) 的關係。

習題：

4. (a) 展開 $(x + 3)(x + 4)$ (b) 解 $x^2 + 7x + 12 = 0$
5. (a) 展開 $(x - 2)(x - 5)$ (b) 解 $x^2 - 7x + 10 = 0$
6. (a) 展開 $(x + 1)(x - 4)$ (b) 解 $x^2 - 3x - 4 = 0$

答案：

4. (a) $x^2 + 7x + 12$ (b) $x = -3$ 或 -4
5. (a) $x^2 - 7x + 10$ (b) $x = 2$ 或 5
6. (a) $x^2 - 3x - 4 = 0$ (b) $x = -1$ 或 4

<u>步驟三：求解其他類型的「二次方程」</u>

這個步驟的目的是要讓學生認識「二次方程」的根之數目。題目的特點是第 7、8 和 9 題分別有兩個根、有一個根和無解。過程中，筆者會建議

學生放棄試誤法，嘗試借助因式分解。

習題：

7. (a) 解 $x^2 - 2x - 8 = 0$ (b) 解 $x^2 + 8x + 15 = 0$

8. (a) 解 $x^2 + 14x + 49 = 0$ (b) 解 $x^2 - 10x + 25 = 0$

9. (a) 解 $x^2 = -4$ (b) 解 $x^2 + 9 = 0$

答案：

7. (a) $x = 2$ 或 -4 (b) $x = 3$ 或 5

8. (a) $x = -7$ (b) $x = 5$

9. (a) 無解 (b) 無解

完成這一系列題目的探索後，學生的「原有認知結構」應會被打破，並重組成另一個「新認知結構」（圖六）。

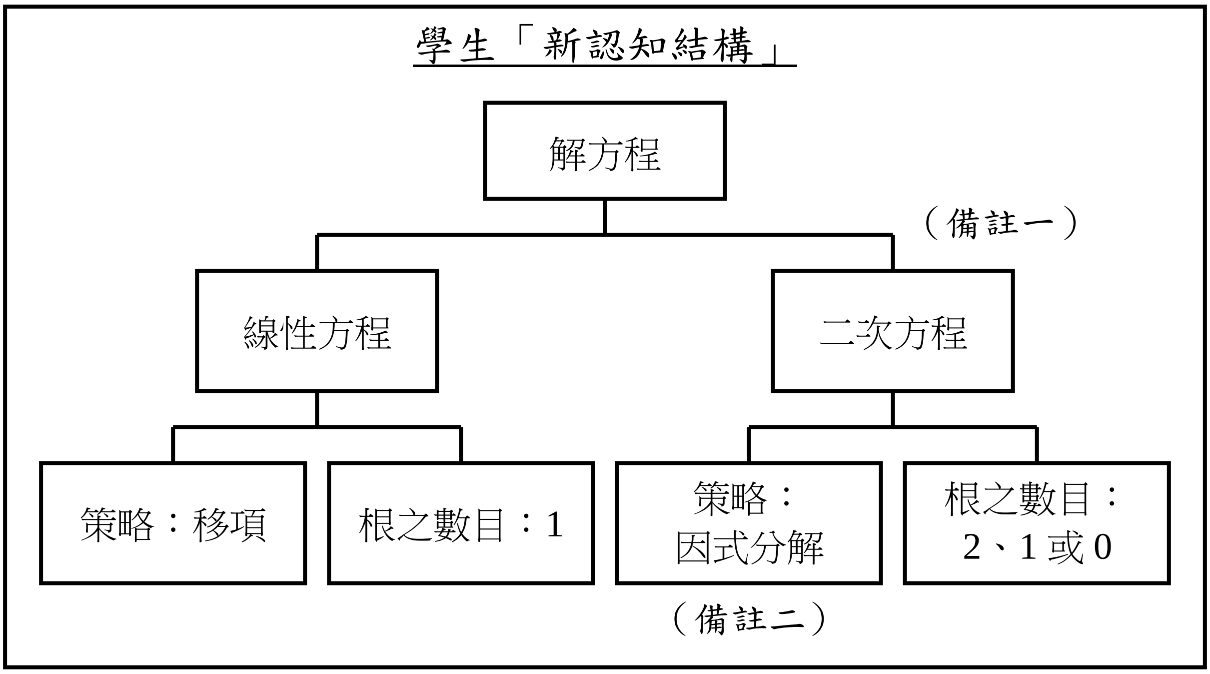

圖　六

當然，學生將來所遇到的方程類型豈止這兩種（備註一），而求解「二次方程」的策略又何止利用因式分解（備註二），然而，筆者總不能一口氣地引入太多議題；何況，這已提供了一個平台，讓筆者於日後的教學設

計中，幫助學生將其他類型的方程和其他求解「二次方程」的策略納入這個「認知結構」中，使其得以擴充，亦即幫助學生作概念「同化」。

製造「認知衝突」

為學生製造「認知衝突」（cognitive conflict）的目的是要打破學生的心理平衡，刺激他們嘗試彌補這個缺口。舉例說，筆者會利用一些數學題目，刻意在學生面前展示一些矛盾之處，刺激他們再三思考。例如，在教授數列之後，筆者便要學生解答以下有關數列的題目：

在一個圓的圓周上取 n 個點，然後將每一個點與其他點作連線，這些連線可將該圓分成 k_n 個區域。參看下表，求 k_6 值。

圓周上的點數 n	1	2	3	4	5	6
圓被分成的區域數目 k_n	1	2	4	8	16	?

由於表中的首五項均與前項相差兩倍，看似等比數列，所以同學一般都會認為 $k_6 = 32$。然而，真正的答案是 $k_6 = 31$。這樣，學生會想，既然這是數列，而每次的增幅都是兩倍，為何答案不是 32 呢？筆者刻意地展示這一矛盾，製造學生心理上的缺口，激發他們尋根究底，最終可優化他們在數列方面的認知結構。

利用「類比」

「類比」（analogy）是知識改變機制中很重要的一環，經由「類比」至先前的知識能促進人們對新事物的洞察（Gentner 等，1997）。筆者在數學教學上亦會用上「類比」，將所要教授的概念連繫到學生熟悉的情境上，這有助於「強調」（highlighting）概念中的一些重要細節。舉例說，在教授初中學生「解方程」時，筆者會以「天平」作為「類比物」（base），帶出「方程」這個「目標物」（target），由此，通過「投射」（projection），同學很容易可理解「方程的等號」對應於「天平的平衡」，隨之又可進一步強調在「解方程」時必須時常保持左右平衡，就如一個平衡的天平般，因此，在方程上進行四則運算時，必須左右兩邊同步進行，若只在其中一邊進行運算便會令天平失衡了。

利用「腳手架」

「腳手架」（scaffolding）就如興建中的大廈的棚架，在大廈未建成之前，作為支撐與輔助。筆者亦時常應用「腳手架」，促進學生的概念改變，以教授「分配律」（distributive law）為例，初中學生由於根基不穩，所以常常有此誤解：$(a + b)(c - d) = ac - bd$。由此，筆者會利用故事作為「腳手架」，引導學生將 $(a + b)(c - d)$ 理解成「兩個大人 a 和 b，要到兩個小朋友 c 和 $-d$ 的家中拜年」，情況就如在講故事一樣，要思考的就是當中要派多少封「利是」了。先考慮 a，他會派「利是」給 c 和 $-d$，所以有 $ac - ad$；再考慮 b，他也會派「利是」給 c 和 $-d$，所以有 $bc - bd$。因此，在整個拜年活動中，會出現四封「利是」：$ac - ad + bc - bd$。

相似地，對於 $(a + b)(c - d + e)$，同學只要在故事情節中加多一位小朋友 e 便行了，這也可說是「學習的遷移」（transfer of learning）。如此，在解題的過程中，筆者將抽象的數學概念，以具體的故事情節帶出，既可促進學生建構「分配律」的概念，亦可增添同學解題的趣味。當然，筆者總不能每堂也講故事的，當同學已能掌握相關概念，並透過成功運算而取得學習的信心時，筆者便會將「腳手架」移開，不再利用故事處理「分配律」了。

結語

筆者應用概念改變於數學教學的策略，主要是因應學生已有知識與原有認知結構，幫助他們作概念同化；當學生的原有認知結構不足以透過同化達致概念改變時，便要幫助他們作概念順應；筆者還會刻意製造認知衝突，以及利用類比和腳手架，進一步促進和穩定學生的概念改變。

由此可見，應用概念改變的策略是形形色色的，不同的策略對於不同的學生亦會有不同程度的效能，因此，筆者認為教師應該因應不同學生的特點、不同課題的內容，靈活而多元地運用種種策略。

參考書目

Driscoll, M. P. (2000). *Psychology of learning for instruction. (2nd ed.).* Boston: Allyn and Bacon.

Driver, R., Guesne, E., & Tiberghien, A. (1985). Some features of children's ideas and their implications for teaching. In R. Driver, E.Guesne, & A. Tiberghien (Eds.). *Children's ideas in science*. Open University Press: Milton Keynes.

Gentner, D., Brem, S., Ferguson, R. W., Markman, A B., Levidow, B. B., Wolff, P., & Forbus, K. D. (1997). Analogical reasoning and conceptual change: A case study of Johannes Kepler. *The journal of the learning sciences*, 6, 1, 3 – 40.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science education*, 66(2)**,** 211 – 227.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in "negativity". *Learning and Instruction*, 14, 469－484.

王子興、宋秉信、昌國良（1999）。《中學數學教育心理研究》。湖南：湖南師範大學出版社。

祁永華、謝錫金、岑紹基（2005）。《變易理論與學習空間》。香港：香港大學出版社。

作者電郵：ltssep@yahoo.com.hk