「老師，用『A 簿』還是用『B 簿』？」

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

名字有甚麼內涵？我們稱之為玫瑰的無論叫甚麼名字仍一樣香甜。[1] ～～莎士比亞《羅密歐與茱麗葉》

應由「向權威求取標準答案」轉化為「學理探究和專業討論」的起點

記得許多年前，第一次教中一生，給了功課後，學生著急地問：「老師，用『A 簿』還是用『B 簿』？」當時筆者心想做好數學題就是了，便回答說：「隨便你」，但學生們仍要一個確切的答案。

及後轉換崗位，擔任教師教育，「一個橙售 3 元，2 個橙售 3 元 ×2、3×2 元、2×3 元、還是 2×3（元）」等問題雖不至如雪片飛來，也可說接踵不斷 [2]。筆者曾想過彙集一份「FAQ」（常見問題：Frequently Asked Questions），後來省悟到這些問題不只無窮無盡，製訂一份 FAQ 亦無補於事。這些問題的追尋不在於其（標準）答案，而在於大家如何看待這些問題。從正面的角度看，這些問題不只是老師深化自己學養的切入點（「處處留心皆學問」！[3]），亦是專業討論／社群論述（social discourse）之平台。

其實這些問題有不同的本質，有些是關於背後的概念的，有些有其歷史原因，有些則是約定俗成。以下筆者就歷年確實聽過的問題稍作討論（然而刻意避免給出「標準」答案），希望大家能將視線轉回教與學的實質上。

其中不少問題是涉及定義和背後的概念的，如

1 “What’s in a name? That which we call a rose by any other name would smell as sweet,” *Romeo & Juliet*, Shakespeare.

2 Wong, N.Y. (1992). The language of sets. *Curriculum Forum, 2*(2), 14 – 28.；黃毅英（1996）。ΔABC ≅ ΔBCA？《數學教育》2 期，22 – 24。

3 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）。教（學）無止境：數學學養教師的成長。載林智中、韓考述、何萬貫、文綺芬、施敏文（編）。《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》（頁 53 – 56）。香港：香港中文大學課程與教學學系。後載黃毅英（編）（2005）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育 —— 蕭文強教授榮休文集》（頁 38 – 45）。香港：香港數學教育學會。

1. $(2 - x)$ 是不是 $(2 - x)(x + 3)$ 和 $x^2 - 4$ 的 g.c.d.（最大公因數／式：Greatest Common Divisor，或稱 H.C.F.：Highest Common Factor）？$\frac{x}{2} - 1$ 又如何？這當然關乎最大公因數由數字擴展到多項式的定義，在高等代數書中定義清清楚楚。但我們仍可探討何以要如此擴展定義使得 g.c.d. 由（非零）正整數的一個（8 與 6 的 g.c.d.就只有 2）到（非零）整數的 2 個（±2）和多項式的無限個呢？

2. 對於 $f : [3, 4] \to \mathbf{R}$，$f(x) = x^2 + 5$，明顯地，3、4 均非拐點，但 3 與 4 是否 $f(x)$ 之相對最小／大值（relative minimum/maximum）呢（嚴格地說，應問 $f(3)$ 和 $f(4)$ 是否 $f(x)$ 之相對最小／大值）（圖 1）？這明顯地涉及鄰域（neighborhood）的概念，及我們如何將 $\mathbf{R}$「拓撲化」（topologise）。在 $\mathbf{R}$ 中，a 的鄰域可以用 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 開區間代表，但對於 $f : A \to \mathbf{R}$（$A \subset \mathbf{R}$）又如何呢？同樣地「書有明文」，大家細心的翻看高等數學有關分析的書籍就清楚了。但仍可進一步問，何以有此定義？若 $f : (3, 4) \to \mathbf{R}$ 又如何？這時，$f(3)$ 又是否相對最小值呢？

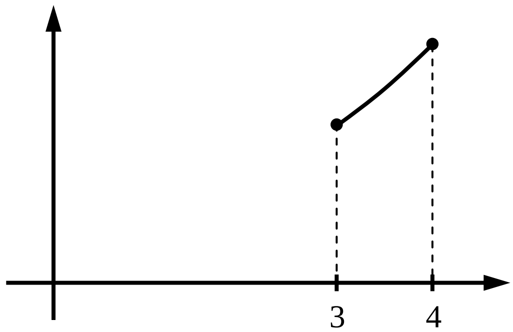


圖 1：最大值和最小值

3. 0.999…（$0.\dot{9}$）= 1 嗎？一般解釋為，設 $A = 0.\dot{9}$

$$\begin{array}{rrcl} & 10A & = & 9.999\ldots \\ -) & A & = & 0.999\ldots \\ \hline & 9A & = & 9 \end{array}$$

故 $A = 1$。但何謂「…」？在涉及「…」時，何謂「=」？翻開任何一本微積分導論關於極限一節就知道了。但我們仍可再進一步探究：一般而言，涉及「…」不可隨便作四則運算，何以對於循環小數，必定可以呢？（因為「有界上升」。）

不少這些問題是屬於極端的情況（irregular case）。上面例 2 已是一種，下面再舉數例。

4. 等差／等比級數之公共差／比可否為 0，特別地，1 , 0 , 0 , 0 , … 可否稱為等比級數。顯然地，若以「 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 為常數」，這個定義，上面的級數會遇到麻煩（因為 $\frac{0}{0}$ 無法定義；undefinable），但若我們用「存在常數 r，便得 $a_{n+1} = r\,a_n$」這個「等價」定義，我們又可討論上面的級數之等比性。

5. 90° 屬於哪個象限？（屬於那個象限又如何？）

6. 每個向量均有方向及長度（magnitude），且 $\lambda\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{a}$ 之方向相同。$\mathbf{0}$ 之方向如何？據上，$\mathbf{0}$ 之方向同時與 $\mathbf{i}$ 及 $\mathbf{j}$（因為 $\mathbf{0} = 0\,\mathbf{i} = 0\,\mathbf{j}$）之方向相同，那末 $\mathbf{i}$ 與 $\mathbf{j}$ 之方向相同？？？

7. 0 是否自然數？[4]

略寫亦是在數學上常見的情況。數學用語上有所謂「當無混淆情況下可省略」的做法，例如理論上必須寫 $(3 \times 4) \times 5$，但由於乘法符合結合律，即 $(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$，故可省略地寫為 $3 \times 4 \times 5$。其他 $3a$（$= 3 \times a$）、$2\sin^2\theta$（$= 2 \times (\sin(\theta))^2$）⋯ 等等類似 [5]。故此，類似問題均可如此考慮。以下再舉事例一束。

8. 小學時，將 (　)、[　]、{　}（甚至有括線）分得清清楚楚，中學時，一個括號就夠了，可見有時學生愈成熟愈想替他們「戒」掉過分壁壘分明的「奶」。

9. $x / 2y = (x / 2)\, y$ 還是 $x / (2y)$？既然這種情況有引起混淆之可能，故是否應考慮不用 $x / 2y$ 這個簡寫？

10. 在初中階段，$x^2 + x - 1$ 不能再「簡化」（因式分解），高中時 $x^2 + x + 1$

---

4 見黃毅英（2005）。自然數的歷史。《朗文教育專訊》5 期，6 – 9。；黃毅英（2005）。從教學上的考慮「0」。《朗文教育專訊》5 期，10 – 11。

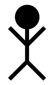
5 黃毅英（2006）。專科專教？「學養教師」!—— 讀舊文兩則隨想。《朗文教育專訊》11 期，7 – 11。

不能再分解，其隱含共知（understood）[6] 的定義域分別是 **Z** 和 **R**。

11. $120° = -240°$？究竟是角相等還是角在笛卡兒平面上之位置相等（而導致它們的 sin / cos / tan 均相同）？

12. 圓形只算周界（$x^2 + y^2 = 1$）還是包含內部（$x^2 + y^2 \leq 1$）？

13. 「$x + y = 1$」是否直線？

14. 象形圖中一個「」代表 10 個人，那麼 25 人怎樣畫？27 人怎樣畫？現時一般教科書均避開這些數據，但是否有點削足適履呢？早期教科書並沒有這種迴避的（圖 2）。

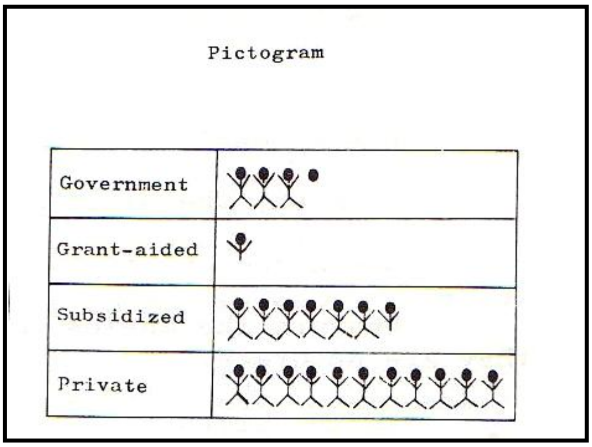


圖 2：象形圖：取自 Mathematics Study Monoid (1965). *Modern Mathematics* (Book 1 Part 1, p. 119). Hong Kong: United College Press.

與略寫類似的就是圖示等表示方式（representation）。以下便是一例：

15. 書中有斜投影、等角投影之分別（圖 3），但究竟甚麼是圖 3 的實質呢？（說個笑話，它們都是平面圖，而非立體圖！）這些都只是外在表徵（external representation）吧？甚麼又是內在表徵呢？

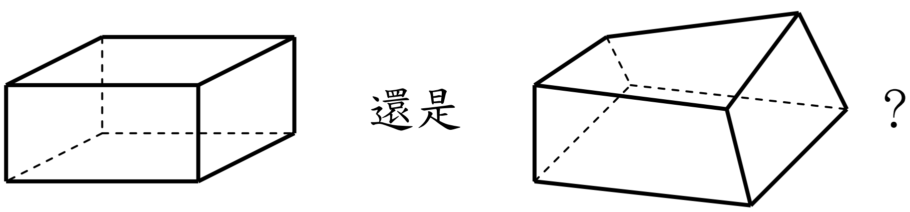


圖 3：哪個才是長方體「正確」的表示？

6　見黃毅英（1996）。ΔABC ≅ ΔBCA？《數學教育》2 期，22 – 24。

數學名詞的出現與給孩子取名可能有不同的地方，就是後者可以在孩子未出世已起了一個名字，甚至有些靠族譜在幾代前已把名字定好了。但一般而言，數學是先有數學概念，才按之命名的。而命名還要看有否此需要。筆者當學生時就問過老師，何以「=」有恆等「≡」，「<」就沒有一個特定之「恆小於」符號（如 $-x^2 - 1 < 0$）？老師回答說，沒有這個數學上的需要。

有些用語是在歷史的長河上慢慢衍生的，並非某某數學家在「創造」一門數學分支時把所有數學名詞先定好。以下便是一例。

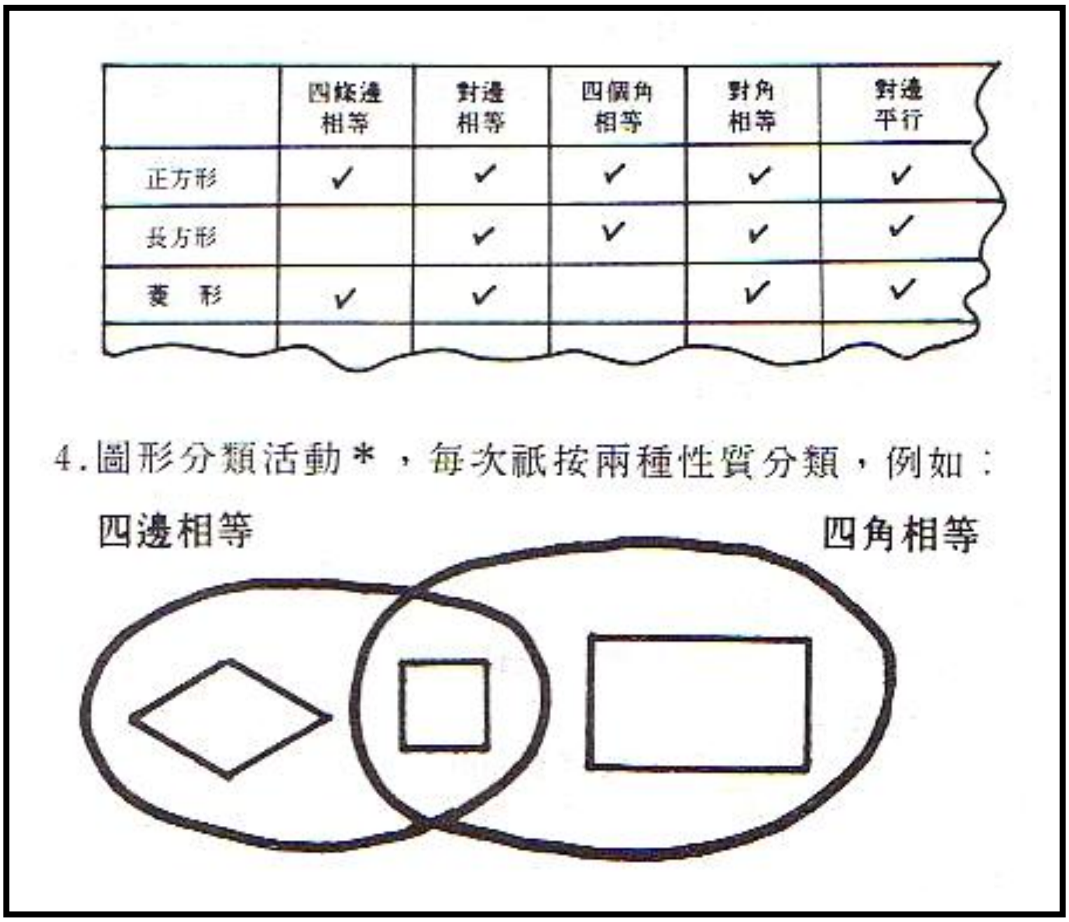
16. 何以三角形叫三角形、四邊形又不叫四角形？這當然可能與翻譯有關（tri***angle***、quadri***lateral***），但叫四角形又有何不可？（據蕭文強教授提供：《原本》正式定義中用三邊形，但同時也用三角形，徐光啟翻譯時沿用之。）

這些用詞的源流除了來自古代數學，也可以來自其他學科（如物理），甚至日常生活。例如「三角」並非數學所專有。也許在《原本》之前，人在日常用語中已有「三角」、「圓」等等。若果我們把數學看成從日常生活經驗中提煉數學概念，箇中之名詞亦少不免是由日常用語慢慢統一到數學用語。例如筆者唸書時，書中就有 oval（即鵝蛋形，由此引入橢圓形，所不同的，鵝蛋形只是視覺中的認定，未進入正規的定義）、wedge（即三角柱體）、average（哪種平均 mean？）等用字。我們值得注意的是，在日常生活的處境（context）中，我們用上不少用語都沒有清晰定義的，甚至是「誤用」的（例如說車的輪胎是圓轆轆的、月亮也是圓的，但其實一個是圓柱體，一個是圓球體），但這就是日常用語的特點 —— 大家也不會不明白的！再者，在數學的過程中，我們不要以為在一開始我們應該清清楚楚的給出數學定義，撇除混雜的日常用語，這不只沒可能（因為數學語言其實也是依存在日常用語的這個載體），而數學化歷程的其中一環正正就是從日常用語和粗糙的理念中提煉出數學來。

這些問題關於約定俗成（convention）的可能較多。約定俗成就是不一定有確切的原因，亦可能因時代及地域而異（如內地叫「素數」，香港一般叫「質數」：數學是一項文化活動嘛！）當然也涉及到當時處理數學上之需要，0 是否自然數便是一例，以下也是一些常見的問題。

17. 正方形是否矩形（長方形）？在《原本》中，正方形並非矩形（白馬

非馬！)，但現時一般而約定了相屬（inclusion）之定義，亦即正方形是矩形也是菱形，菱形是平行四邊形，平行四邊形也是梯形（圖 4）。



	四條邊相等	對邊相等	四個角相等	對角相等	對邊平行
正方形	✓	✓	✓	✓	✓
長方形		✓	✓	✓	✓
菱　形	✓	✓		✓	✓

4.圖形分類活動＊，每次祇按兩種性質分類，例如：

圖 4：正方形、長方形、菱形之關係。取自香港課程發展委員會（1985）。《小學課程綱要：數學科》，頁 47。香港：政府印務局。

18. 有老師曾問正方形旋轉了 90° 後（圖 5）是否正方形，還是菱形？

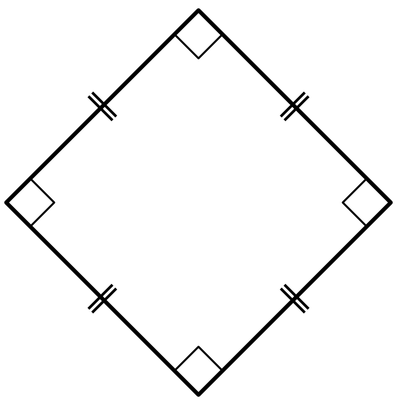


圖 5：菱形？

19　長方形哪邊是長，哪邊是闊（圖 6）？正方形又如何？

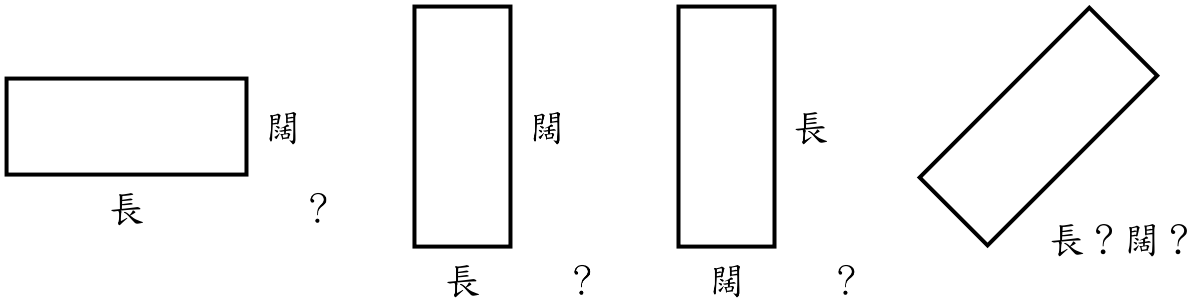


圖 6：哪條邊是長？哪條邊是闊？

20.　梯形中哪個是上底？哪個是下底（圖 7）？

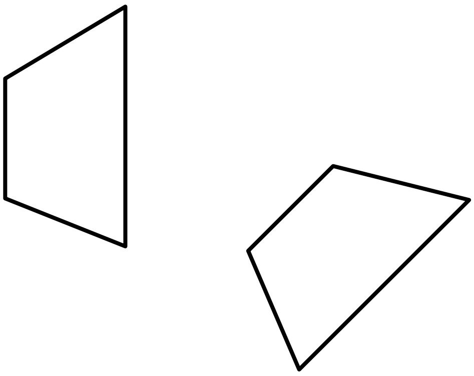


圖 7：哪是上底？下底？

以上只是舉出一隅，其他類似問題林林總總，不一而足，在總結本文時，讓我們試用數個角度去看這些問題。

結論

所謂佛法者，即非佛法，是名佛法。

～～《金剛般若波羅蜜經‧依法出生分第八》

道可道，非常道；名可名，非常名。

～～《道德經》第一章

學習上之考慮

如上所述，假若我們把數學學習看成從日常經驗中提煉出數學元素，

起碼在學習初期，統一化不一定是好事。如果我們借用社群建構主義（social constructivism）的觀點，教師的其中一個功能就是要佈置一個容許社群論述、甚至互動磋商（negotiation）的環境，讓學生慢慢建構自身的數學概念[7]。簡言之，就是要容許學生有相當大的空間和彈性，讓大家慢慢聚焦到統一的數學語言系統來，而不是權威地指令學生「正方形就是……」、「三角形就是……」了事，無論如何，過分的統一化、標準化不一定有助於學習。

溝通

一些人認為精準的用詞一定有利溝通和了解，當然若大家用字南轅北轍，溝通幾乎沒可能（巴別塔！）。但其實語言是有彈性的。例如香港人說「無所謂」（普通話也開始接受這個用語）、台灣人說「沒關係」、北京人說「沒事兒」、又有些人甚至用「無問題」、「不打緊」…… 各有姿采，沒有統一必要。在某些情況下，過分精準的用語反為會障礙理解。解說只是打開理解的第一步，有時含糊的解說會促成對話（當然我們不是說刻意令至不精準）、語言上的磋商，才達至真正的理解。箇中觀點於此從略。

數學課程

當然我們仍要有一定的規範。上面談到的約定俗成，即使只考慮溝通上的方便，總不能不同學生、不同學校有不同的一套定義。而這個約定從何而來？筆者以為流行的書籍（包括外國的常用數學書及本地的教科書）、官方的課程檔及詞彙等都是這種約定的甚佳參考。不過在統一化當中，大家仍要意識到這畢竟是一種約定，例如大家若同意了 0 是自然數，忽然看到一本書說 0 不是自然數，明顯地必定馬上否定它的說法。

行政

以上問題往往出自一些行政問題，例如不同老師／班別有不同說法，例如某老師用「質數」，另一老師用「素數」。在數學而言上，自然兩人皆沒錯，若大家能按照常用書籍、大綱等協調一下、統一一下亦無妨。筆者以為最重要的是不應本末倒置，把行政上的爭拗損害學生的學習。

試卷出現漏洞怎辦？

這恐怕是這些問題的最主要導火線。以筆者參考考試局（今名考評局）

7 Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. U.S.: Cambridge University Press.

的工作經驗，他們會設法避開這些問題。例如：不說「a_n是一等比級數」，而是「考慮 a_n，其中 $a_n = a_0 r^{n-1}$」，甚至一早排除了特殊情況說「a_n是一每項均非 0 之等比級數」之類。又或不說「a_n，$n \in \mathbf{N}$」，而寫「a_n，$n = 1, 2, 3, \ldots$」（這其實又衍生另一問題：保障了出卷員，但有時使題目的行文比較累贅，學生讀來不易）。照筆者所知，考評局每每用上半年以上去逐字斟酌（所謂「摸／磨卷」：「摸／磨」與 moderate 諧音 —— 因審卷員英文稱為 moderator）。前線老師不可能如此仔細，亦不值得花上這些功夫。

我們擬定每道題的時候，可能要問自己，我們出這道題之目的是甚麼？是考名詞（不是說不重要）、考概念還是考技巧？比重如何？會否喧賓奪主？現時教改提出促進學習的評核（assessment for learning）而非評估學習結果（assessment of learning），評核與學習應變成一種互動過程以評估促進而非打擊學習。

至於出題有瑕疵，雖應盡力避開，但有時在所難免，到時是否應以「利益歸於被告」的寬懷去處理呢？在行政角度上，我們也可考慮確立一套共識機制，甚至讓家長也知道，就是若發現擬題上的問題，經過一定程序（如有關老師開會），該題分數自動刪除（之類），免得臨時捲入無謂的「內耗」中。總之，教學上要處理的問題已十分多了，我們是否應該將時間和精力集中在真正的學習上呢？

筆者唸大學一年班時，一天上課，講師突然問我們「≠」和「≒」有甚麼分別？我們想了半天也不知答案。到翌日上課，他說，一是英美書常用的，一是日本書用的，他更藉這個事例告訴我們，見到人家用「≒」，不要說他錯，不過我們這裡的習慣還是用「≠」的。筆者想，若我們必須給（中小）學生一個明確的統一用語，這種說法就最清楚不過了。

最後筆者以張澄基引用的一段禪故事作結（張先生當時是想利用這個故事指出眾生思想的實執性的）[8]：

> 從前有一個老和尚，在房中閒坐著，身後站著個小侍者。那時門外有甲乙兩個和尚在爭論一個問題，堅持不下。一會兒，甲氣沖沖的跑進房內，對老和尚說：「師父，我說

8　見張澄基（1956/1996 年版）。《佛學四講》。台北：法嚴寺出版社，頁 21 – 22。

這個道理，是應該如此這般的，可是乙卻說我說的不對。您看是我說的對，還是他說的對？」老和尚對甲說：「你說得對！」甲和尚很高興的出去了。等了幾分鐘，乙和尚也氣憤憤的跑進房來，他質問老和尚道：「剛才甲與我辯論，他的意思根本不對，我是根據佛經上說的。我的意思是如此這般 …… 您說還是我對呢，還是他對？」老和尚說：「你對！」乙和尚也歡天喜地的出去了。乙走後，站在老和尚背後的小和尚，悄悄在老和尚耳邊說：「師傅！要就是甲對，要就是乙對；甲如對，乙就不對；乙不對，甲就對；您怎麼可以向兩個人都說『你對』呢？」老和尚掉過頭來，對小和尚望了一望，說：「你也對！」

後記：「pp −1」

稿成之後，剛巧電郵上有著會考卷「pp −1」[9] 的討論，於此不吐不快。筆者以為除了解答正確外，要求考生表達有條理是理所當然的，然而其中一些不一定涉及數學之邏輯性，有些是「格式」問題，只屬一種共識。話雖如此，只要考生一早清楚這些格式要求，亦無不是之處。不過更深層的看，雖然筆者了解現時許多考試帶來很大的壓力，但假若大家教學上只知針對這些考試要求去施教，未免令人婉惜。故此最近有一個討論，說現時的評估未有完全跟著教改走，這當然出現評估不良地帶動學習／課程的狀況，但若高姿態的要評估全依從教改（或新課程），試圖用評估推動教改（而不是用教學理念去說服大家新課程之優勢）不也是另一種形式的「以評估帶動學習」嗎？這是有關方面所值得慎思的。我們應讓大家看到，教「不考的內容」會豐富學生的理解、增進其問題解決能力，成績是不可能不提升的。若連教育也那麼殺雞取卵、「上下交征利」[10]，下一代又會變成怎樣呢？

作者電郵：nywong@cuhk.edu.hk

9 “pp” 即 “poor presentation”：考生因表達欠佳而被扣一分，每部最多扣一分。

10 《孟子‧梁惠王章句上》：「上下交征利，而國危矣！」