第 46 屆國際數學奧林匹克競賽
第三題的證明、加強與推廣

蔣明斌
四川省蓬安縣蓬安中學

1. 引言

2005 年 7 月在墨西哥梅裏達（Merida）舉行的第 46 屆國際數學奧林匹克競賽（IMO 2005）的第三題爲：設 x、y、z 爲正數且 $xyz \geq 1$。求證：

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq 0 \qquad (1)$$

這道由韓國提供的不等式試題成爲本屆 IMO 中得分率最低的一題：所有參賽選手的平均得分僅爲 0.92 分，得滿分者只有 55 位（佔 10.87 %），得零分的高達 417 位（佔 82.41 %）。足見此題的難度。

本文擬給出此題的證明、加強與推廣。

2. 證明與加強

證明本題的關鍵是構造「零件不等式」，將「零件不等式」組裝即得所證不等式。若不然，想通過「去分母化爲整式不等式」的方法來證明，可能難以達到目的。

對於幾項和的對稱分式不等式來講，所謂構造「零件不等式」，實際上就是將和式中的每一項放縮成分母相同、分子可輪換的式子。具體如何放縮往往須經過猜測、直覺、推理等。

對於不等式 (1) 還須注意到條件 $xyz \geq 1$ 可變形爲 $\frac{1}{x} \leq yz$ 或 $x \geq \frac{1}{yz}$ 而達換元或消元的目的。

分析 1

考慮 (1) 式的特點，擬構造「零件不等式」：

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{(x^5-x^2)\,A(x)}{x^2+y^2+z^2} \qquad (2)$$

其中 $A(x)$ 待定。

而 (2) 等價於 $x^2(x^3-1)\{[x^2-x^5\cdot A(x)]+[1-A(x)](y^2+z^2)\}\geq 0$ (3)

若取 $A(x)$ 使 $x^2-x^5\cdot A(x)=0$，即 $A(x)=\dfrac{1}{x^3}$，則有

$x^2(x^3-1)\{[x^2-x^5\cdot A(x)]+[1-A(x)](y^2+z^2)\}$

$= x^2(x^3-1)(1-\dfrac{1}{x^3})(y^2+z^2)=\dfrac{1}{x}(x^3-1)^2(y^2+z^2)\geq 0$，即 (3) 成立。

因而，有 $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geq\dfrac{(x^5-x^2)\frac{1}{x^3}}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}$，又由 $xyz\geq 1$，有 $\dfrac{1}{x}\leq yz\leq\dfrac{1}{2}(y^2+z^2)$，則 $x^2-\dfrac{1}{x}\geq x^2-\dfrac{1}{2}(y^2+z^2)$，所以

$\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geq\dfrac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$，這就得出證不等式 (1) 所須的「零件不等式」。

同理，$\dfrac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}\geq\dfrac{y^2-\frac{1}{2}(z^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}$、$\dfrac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geq\dfrac{z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}$。

三式相加有 $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\dfrac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\dfrac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geq 0$，故不等式 (1) 成立。

<u>分析 2</u>

由 $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=1-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$、$\dfrac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}=1-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}$、$\dfrac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}=1-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}$ 知不等式 (1) 等價於

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}\leq 3 \qquad (4)$$

爲證不等式 (4)，擬構造「零件不等式」:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{B(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \tag{5}$$

其中 $B(x, y, z)$ 待定。

而 (5) 等價於 $(x^5+y^2+z^2)\,B(x,y,z) \ge (x^2+y^2+z^2)^2$ (6)

由於此式類似於柯西不等式的結構，若考慮用柯西不等式，可取 $B(x,y,z) = \frac{1}{x}+y^2+z^2$，則 (6) 就是 $(x^5+y^2+z^2)(\frac{1}{x}+y^2+z^2) \ge (x^2+y^2+z^2)^2$，因而 (5) 就是 $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$，再考慮到由條件$xyz \ge 1$，有 $\frac{1}{x} \le yz \le \frac{1}{2}(y^2+z^2)$，所以 $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ (7)

這就得到爲證明不等式 (4) 所須的「零件不等式」。

同理，$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2} \le \frac{3}{2}\frac{z^2+x^2}{x^2+y^2+z^2}$、$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5} \le \frac{3}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$。

三式相加有 $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5} \le 3$，不等式 (4) 成立，故不等式 (1) 成立。

分析 3

注意到不等式 (1) 等價於 $\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}$

$$\ge \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5} \tag{8}$$

可考慮將 (8) 加強爲 $\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}$

$$\ge 1 \ge \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5} \tag{9}$$

爲證 (9) 左邊的不等式，擬構造「零件不等式」：

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} \ge \frac{x^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha} \tag{10}$$

其中 α 為待定常數。

而 (10) 則等價於 $y^{\alpha}+z^{\alpha}-(\frac{1}{x})^{5-\alpha}(y^2+z^2)\ge 0$

注意到 $\frac{1}{x}\le yz\le\frac{1}{2}(y^2+z^2)$，先假設 $\alpha<5$，則 $5-\alpha>0$，則有

$y^{\alpha}+z^{\alpha}-(\frac{1}{x})^{5-\alpha}(y^2+z^2)\ge y^{\alpha}+z^{\alpha}-(\frac{y^2+z^2}{2})^{5-\alpha}(y^2+z^2)=y^{\alpha}+z^{\alpha}-(\frac{1}{2})^{5-\alpha}(y^2+z^2)^{6-\alpha}$。

若取 $\alpha=4$，則有 $y^{\alpha}+z^{\alpha}-(\frac{1}{2})^{5-\alpha}(y^2+z^2)^{6-\alpha}=y^4+z^4-\frac{1}{2}(y^2+z^2)^2=\frac{1}{2}(y^2-z^2)^2\ge 0$，因此，有 $\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$，這樣就得到證明 (9) 左邊的不等式所須的「零件不等式」。

同理，有 $\frac{y^5}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{y^4}{x^4+y^4+z^4}$、$\frac{z^5}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$。三式相加即得式 (9) 左邊的不等式。

為證 (9) 右邊的不等式，構造「零件不等式」時，注意到由前面已證明的 (7) 有 $\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$，所以 $\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{3}{2}\frac{x^2y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$，這得到為證 (9) 右邊的不等式所須的「零件不等式」。

同理，有 $\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}\le\frac{3}{2}\frac{y^2z^2+x^2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$、$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\le\frac{3}{2}\frac{x^2y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$。三式相加得 $\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\le\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\le\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=1$，即式 (9) 右邊的不等式成立，因而不等式 (1) 成立。

3. 推廣

將不等式 (1)、(9) 推廣到 n 個字母的情形，得到

命題　設 $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)，$x_1 x_2 \cdots x_n \geq 1$，則

(i) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2n-1} - x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1}} \geq 0 \tag{11}$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1}} \geq 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1}} \tag{12}$$

注記 1：在命題中取 $n = 3$，由 (11)、(12) 即得 (1)、(9)。所以命題是不等式 (1)、(9) 的推廣。

證明　顯然不等式 (12) 是 (11) 的加強，故只須證明 (12)。

為證明 (12) 左邊的不等式，先證明

$$\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1}} \geq \frac{(x_i^{n-1})^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j^{n-1})^2} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} (x_j^{n-1})^2 - \frac{1}{x_i}(x_i^{2n-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_j^{n-1})^2 - \frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1} \geq 0 \tag{14}$$

因為 $\frac{1}{x_i} \leq \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j \leq \frac{1}{n-1} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1}$，又由柯西不等式有 $(n-1)\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_j^{n-1})^2$ $\geq (\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1})^2$，所以 $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_j^{n-1})^2 - \frac{1}{x_i} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1} \geq \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_j^{n-1})^2 - \frac{1}{n-1} (\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1})^2 =$ $\frac{1}{n-1}[(n-1)\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_j^{n-1})^2 - (\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j^{n-1})^2] \geq 0$。即不等式 (14) 成立，因而不等式

(13) 成立。

於是 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{{x_i}^{2n-1}}{{x_i}^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}} \geq \sum_{i=1}^{n}\dfrac{({x_i}^{n-1})^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}({x_j}^{n-1})^2}=1$，即式 (12) 左邊的不等式成立。

又由於 $x_1x_2\cdots x_n \geq 1$，有 $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j \geq \dfrac{1}{x_i}$，由柯西不等式有

$$({x_i}^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1})(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}) \geq ({x_i}^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1})(\frac{1}{x_i}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}) \geq (\sum_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2,$$

所以
$$\frac{1}{{x_i}^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}} \leq \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2} \leq \frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2},$$

即
$$\frac{1}{{x_i}^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}} \leq \frac{n}{n-1}\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2} \tag{15}$$

於是
$$\frac{{x_i}^{n-1}}{{x_i}^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}} \leq \frac{n}{n-1}\frac{{x_i}^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1}-{x_i}^{n-1})}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2}=\frac{n}{n-1}\frac{{x_i}^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})-({x_i}^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2}$$

對 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^{n-1}}{{x_i}^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{x_j}^{n-1}} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n-1}\frac{{x_i}^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})-({x_i}^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2}=\frac{n}{n-1}\frac{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2-\sum\limits_{j=1}^{n}({x_j}^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2}$$

因此，要證式 (12) 右邊的不等式，只須證明

$n(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2-n\sum\limits_{j=1}^{n}({x_j}^{n-1})^2 \leq (n-1)(\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2 \Leftrightarrow n\sum\limits_{j=1}^{n}({x_j}^{n-1})^2 \geq (\sum\limits_{j=1}^{n}{x_j}^{n-1})^2$，由

柯西不等式知後一不等式成立，所以 (12) 右邊的不等式成立。故不等式 (12) 成立。

注記 2：不等式 (11) 的一種直接證明：

因爲 $$\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}-\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=\frac{x_i^{n-1}(x_i^{n-1}-1)^2\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}{(x_i^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1})(x_i^{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})}\geq 0$$ ，由此並注意到 $\frac{1}{x_i}\leq\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j\leq\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}$ ，則

$$\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}\geq\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{x_i}}{\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}\geq\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}{\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}$$ ，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}{\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{n-1}-\frac{1}{n-1}(n-1)\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}{\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=0$$ ，

即不等式 (11) 成立。

注記 3：不等式 (11) 等價於 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{2n-1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j^{n-1}}\leq\frac{n}{\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1}} \qquad (16)$$

這可由前面已證得的 (15) 對 i 求和即得。

注記 4：作替換 $x_i^{n-1}\to x_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$)，則 (11)、(12)、(16) 分別等價於

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\frac{2n-1}{n-1}}-x_i}{x_i^{\frac{2n-1}{n-1}}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j}\geq 0 \qquad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\frac{2n-1}{n-1}}}{x_i^{\frac{2n-1}{n-1}}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j}\geq 1\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i^{\frac{2n-1}{n-1}}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j} \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{\frac{2n-1}{n-1}}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j}\leq \frac{n}{\sum_{j=1}^{n}x_j} \tag{19}$$

其中$x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，$x_1x_2 \cdots x_n \geq 1$。

考慮 (17)、(18)、(19) 的進一步推廣，我們有以下猜想：

猜想　設$x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，$x_1x_2 \cdots x_n \geq 1$，則當實數$p \geq 1$時，下列不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,p}-x_i}{x_i^{\,p}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j}\geq 0 \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,p}}{x_i^{\,p}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j}\geq 1\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i^{\,p}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j} \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{\,p}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j}\leq \frac{n}{\sum_{j=1}^{n}x_j} \tag{22}$$

作者電郵：jmb8680555@tom.com