構造圓求最大值和最小值

姜瑩
江蘇省泰州中學

求最大值和最小值的方法較多，也各有特色，但構造法卻非常新穎。本文主要談談如何構造圓以求解最大值和最小值問題，供師生參考。

一、最大值問題

例 1　已知$x^2+y^2=25$，求函數$Z=\sqrt{8y-6x+50}+\sqrt{8y+6x+50}$ 的最大值（2002 年全國數學奧林匹克高二競賽訓練題）

分析：先根據題設條件，將函數寫成$Z=\sqrt{x^2+y^2+8y-6x+25}+\sqrt{x^2+y^2+8y+6x+25}=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}$，則$Z$可以看成圓$x^2+y^2=25$ 上的點$P(x,y)$ 到這圓上兩定點$B(3,-4)$，$C(-3,-4)$ 的距離之和，當這個和為最大時，P點顯然在優弧的中點。

解

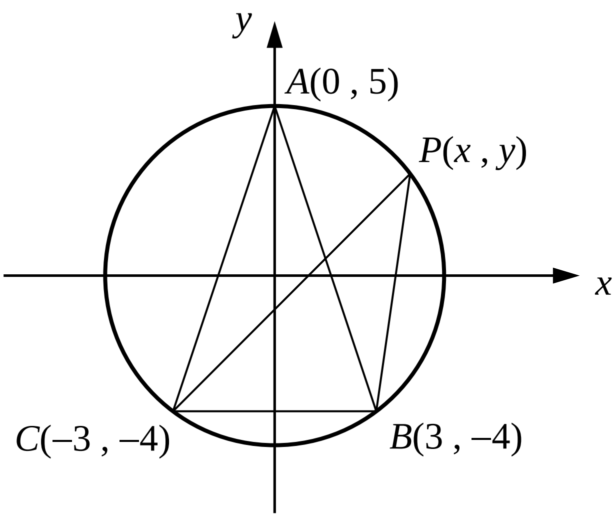

圖　1

如圖，$\angle ABC=\angle ACB=\alpha$，$\angle ABP=\angle ACP=\beta$，則$AB=AC=2R\sin\alpha$，

$\therefore AB+AC=4R\sin\alpha$，又$PC=2R\sin(\alpha+\beta)$，$PB=2R\sin(\alpha-\beta)$，

$\therefore PB+PC=2R[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=4R\sin\alpha\cos\beta\le 4R\sin\alpha$。

當 $\beta=0$ 時，最後的不等式成為等式，這時有$Z_{max}=2\sqrt{8\times5+50}=6\sqrt{10}$

注：當 $\beta=0$ 時，$P(x,y)$ 與 $A(0,5)$ 重合，這時 $y=5$，$x=0$。

二、最小值問題

例 2　已知x、y、z爲正數，且$xyz(x + y + z) = 1$。試求$M = (x + y)(y + z)$ 的最小值。

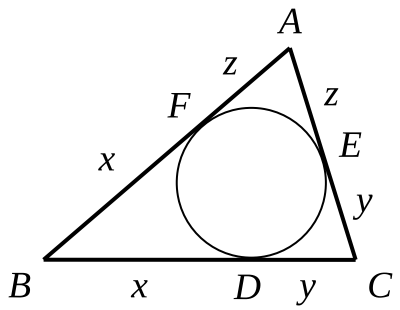

圖　2

分析：由於 $xyz(x + y + z) = 1$ 與三角形的面積公式（海倫公式）$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$，其中 $P = \frac{1}{2}(a + b + c)$，有相似之處，故不妨構造一個圓外切三角形 ΔABC（如圖 2），切點分別爲 D、E、F，使 $BD = BF = x$，$CD = CE = y$，$AE = AF = z$，則有 $x + y = a$，$y + z = b$，$z + x = c$。

$\therefore P = \frac{1}{2}(a + b + c) = x + y + z$，$P - a = z$，$P - b = x$，$P - c = y$，從而由題設 $xyz(x + y + z) = 1$ 得 $S = \sqrt{xyz(x+y+z)} = 1$。

又，$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(x + y)(y + z)\sin C = 1$，但$\sin C \le 1$，

$\therefore (x + y)(y + z) = \dfrac{2}{\sin C} \ge 2$，故$M = (x + y)(y + z)$ 的最小值爲 2，當且僅當$C = 90°$，等號成立。

三、最大（小）值問題

例 3　已知$x^2 + y^2 + 5x \le 0$，求$Z = 3x + 4y$的最大值和最小值。（2001 年欽州市高中數學競賽題）

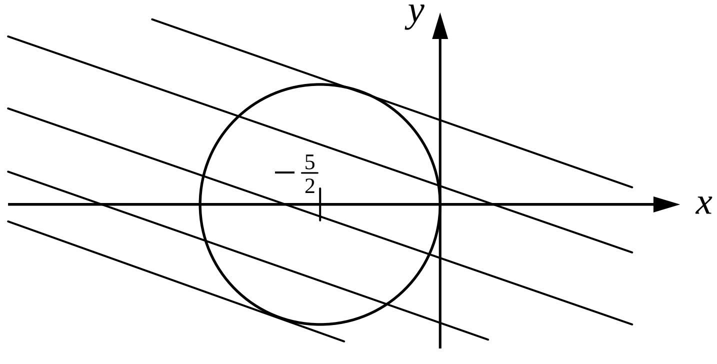

圖　3

分析：由於$x^2+y^2+5x=0$ 經配方可轉化爲 $(x+\frac{5}{2})^2+y^2=(\frac{5}{2})^2$，顯然這是圓心坐標爲 $(-\frac{5}{2}, 0)$，半徑爲 $\frac{5}{2}$ 的一個圓。由此可知滿足$x^2+y^2+5x\le 0$ 的點 (x, y) 在此圓內或圓上，又由$Z=3x+4y$變形得 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{Z}{4}$ ，顯然這是一個一次函數，其圖形斜率爲 $-\frac{3}{4}$ 的平行直線系，於是求解問題可歸結爲這組直線在上述區上平行移動時何時縱截距爲最小。

解　由圖可知，當直線與圓相切，運用 $\Delta=0$ 可求$Z_{\max}$和$Z_{\min}$，將 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{Z}{4}$ 代入圓方程$x^2+y^2+5x=0$ 中，化簡整理，得 $25x^2+(80-6Z)x+Z^2=0$，$\therefore \Delta=(80-6Z)^2-100Z^2=0$，整理得$Z^2+15Z-100=0$，$\therefore Z_1=5$，$Z_2=-20$。$\therefore Z_{\max}=5$，$Z_{\min}=-20$。

綜上所述，應用構造法求最大（小）值問題，關鍵在於根據題設及所求題目的結構特徵去構造相適應的圖形求解即可。此法數形結合，直觀性強，故便於理解，因此有必要一談。

另外值得一提的是，我們還可以通過構造拋物線、雙曲線、橢圓求解最大（小）值，現再舉幾例結束本文。

例 4　求 $y=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-8x+4}$ 的最大值和最小值。

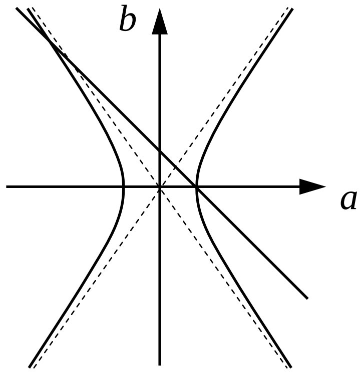

圖　4

解　令 $\sqrt{x^2-4x+3}=a$，$\sqrt{2x^2-8x+4}=b$（$a\ge 0, b\ge 0$），則$b=-a+y$，$2a^2-b^2=2$，建立a-O-b坐標系，則原題轉化爲求直線$b=-a+y$與雙曲線 $2a^2-b^2=2$ 在第I象限（含坐標軸）內有公共點時，直線在b軸上的截距。

如圖，根據數形結合，不難看出y只有最小值，而無最大值。當直線過 $(1, 0)$ 時，$y_{\min}=1$，故$y=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-8x+4}$ 的最小值等於 1。

例 5　已知一元二次方程$x^2 + 5mx + n = 0$ 的兩個根在一元二次方程$x^2 + 5mx + 3n - 5 = 0$ 的兩根之間。求n的最大整數值。（2000 年全國數學奧林匹克初三競賽訓練題）

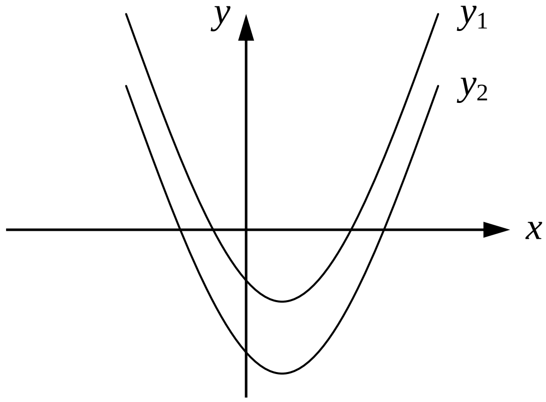

圖　5

解　依題設可構造函數$y_1 = x^2 + 5mx + n$與x軸的交點在函數$y_2 = x^2 + 5mx + 3n - 5$ 與x軸的交點之間如圖所示。而y_1與y_2的開口方向、大小相同，且頂點橫坐標均爲 $-\dfrac{5m}{2}$ ，∴ 只須函數y_1的頂點在函數y_2的上方即可，故 $\dfrac{4(3n-5)-25m^2}{4} < \dfrac{4n-25m^2}{4}$ 解得 $n < \dfrac{5}{2}$ ，∴ n的最大整數值是 2。

例 6　求 $y = \sqrt{2x^2-4} + \sqrt{9-3x^2}$ 的最大值和最小值。

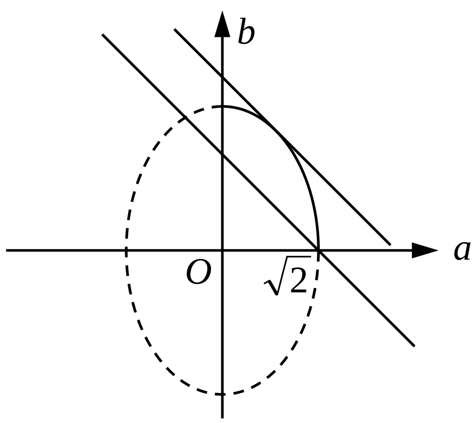

圖　6

解　令 $\sqrt{2x^2-4} = a$ ，$\sqrt{9-3x^2} = b$（$a \geq 0$，$b \geq 0$），則$b = -a + y$，$3a^2 + 2b^2 = 6$。建立a-O-b坐標系，則原題化爲直線$b = -a + y$與橢圓 $3a^2 + 2b^2 = 6$ 在第I象限（包含坐標軸）內有公共點時，直線在b軸上的截距。如圖，根據數形結合，不難求出，直線過 $(\sqrt{2}, 0)$ 時，$y_{\min} = \sqrt{2}$ ；直線與橢圓在第I象限相切時，$y_{\max} = \sqrt{5}$ 。

附思考題

1. 已知$x^2+y^2=169$，求 $M=\sqrt{24y-10x+338}+\sqrt{24y+10x+338}$ 的最大值和最小值（$M_{\max}=10\sqrt{26}$，$M_{\min}=10$）

2. 求函數 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值。（最大值爲 $\sqrt{10}$）

3. 函數 $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{2+3x-x^2}$ 的最大值是 ________，最小值是 ________。（第 14 屆 03 年「希望杯」高二第 2 試）（最大值是 $2\sqrt{2}$，最小值是 2）

4. 函數 $y=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-4x+8}$ 的最小值是 ________。（2000 年河北省初中數學競賽題）（y 的最小值是 $3\sqrt{2}$）

5. 函數 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+10}$ 的最小值是（　　　　　）。
   A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $\sqrt{17}$　　D. $\sqrt{26}$
   （第 14 屆 03 年「希望杯」高二第 1 試）（選 D）

6. 實數x、y滿足方程 $(x+2)^2+y^2=1$，則 $2x-y$的最大值等於 _______。（第 10 屆 99 年「希望杯」高二第 1 試）（$-4+\sqrt{5}$）

參考資料

[1] 于志洪（1982）。利用幾何圖形求函數的極值。《福建中學數學》，1982 年第 3 期。

[2] 蔡惠萍（2004）。幾何圖形在代數解題中的應用。《數學通報》，2004 年第 3 期。

[3] 于志洪（2005）。構造圓錐曲線求最值。《上海中學數學》，2005 年第 3 期。

聯絡地址：江蘇省泰州中學（郵政編碼：225300）