Kaprekar Numbers 與形形色色的再現數

黃志華

在網上讀到一段來自台灣的消息[1]，摘要如下：

台中市立惠文高中數理資優班的學生邱鈺茜，以「分和累乘再現數產生的方法及其性質探討的推廣」爲題，在 2005 年第四屆「旺宏」科學獎中，擊敗全台各地明星高中，榮獲「金牌獎」，獎金四十萬元。

邱鈺茜表示，這篇論文的源起，始於數學界有個著名的「幽靈雷劈數」，據說印度一名數學家（筆者按：其名字是 Kaprekar），某天發現火車站一個數字爲 3025 的里程碑遭雷電劈成兩半，他忽地發現兩半的數字 30 加上 25 是 55，而 55 的平方剛好是 3025。而邱鈺茜所發現的是數學界尚未有人發現的數列，和「幽靈雷劈數」有異曲同工之妙，她將它命名爲「雷霆數」，例如 121 是 11 的平方，而 12 減 1 剛好是 11；6084 是 78 的平方，而 84 減 6 剛好是 78。

競賽的評審教授對一位高中生能做出碩士級以上論文大表吃驚，也曾懷疑一個高中生能有這樣的程度做出這樣的研究，但當他們看到邱鈺茜用高中程度的「長除法」和「歐幾里得原理」推算出結果後，終於信服原來這偉大的發現是源於中學數學的基本概念。

❖ ❖ ❖

對於分和累乘再現數或西方慣稱的*Kaprekar Numbers*，筆者一直都有濃厚的研究興趣，早年便在本刊的第四期（97 年 6 月）以「豈止『破鏡重圓』」[2]爲題寫過一篇介紹文字。事隔也快有十年，在網上搜尋資訊容易了，也能找到一些可以共享的高強冪和計算程式，加上自己點點研究心得，所以有關這種數的方方面面都有不少新的東西可談談。

爲方便表述，這裡先爲幾種常見的分和累乘再現數給出定義。

甲、N次再現數

若正整數A的N次方$A^N = d_k \times 10^{(k-1)n} + \ldots + d_3 \times 10^{2n} + d_2 \times 10^n + d_1$，這

裡，$10^n - 1 \geq d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n \geq 0$（但$d_1$必須大於 0），$n > 0$，滿足 $A^N \equiv A \equiv \sum_{i=1}^{k} d_i \pmod{10^n - 1}$，則我們稱$A$爲$N$次再現數。

例：　由於　　$296^3 = 25934336$

而　$25 + 934 + 336 = 1295$

$1 + 295 = 296$

因此 296 是三次再現數。

可以補充一下的是，這個定義裡的同餘式其實跟棄九驗算法也很有關係，不過它不僅是 9，而且也包括 99、999、9999 ⋯ 等。

事實上，由於 $10^n \equiv 1 \pmod{10^n - 1}$，所以在上述定義裡，對於任一個$i$總是有 $d_i \times 10^{(i-1)n} \equiv d_i \pmod{10^n - 1}$ 這裡$k \geq i \geq 1$。也因此，要計算某個多位數被 $10^n - 1$ 除的餘數是多少，就不須老老實實的去除這個多位數，而是從這個多位數的個位數數起，每n個位截出一個數，再把這些截出來的數加起來，把新的得數除以 $10^n - 1$，所得的餘數就是答案了！

乙、N次完美再現數

若正整數 A 不但符合上述甲項裡「N 次再現數」的定義要求，而且完全滿足下述的三項條件：

(i) $\sum_{i=1}^{k} d_i < 10^n$

(ii) $k = N$

(iii) $10^{n-1} < A < 10^n$

則我們稱這樣的正整數爲 N 次完美再現數。

丙、N次低度完美再現數

若正整數A符合「N次再現數」的定義，也滿足 $\sum_{i=1}^{k} d_i = A$，但$k > N$，$A > 10^n$或當$k = N$時，卻有$A < 10^{n-1}$，又或者有$k < N$，則我們稱這樣的A爲N次低度完美再現數。

例一：　$342^6 = 1600135042849344$

而 16 + 00 + 13 + 50 + 42 + 84 + 93 + 44 = 342

這裡 $k = 8$，$N = 6$，$n = 2$，因此 342 是六次低度完美再現數。

例二： $5292^2 = 28005264$

而 28 + 005264 = 5292

這裡 $k = N = 2$，但 5292＜106 − 1，因此 5292 是二次低度完美再現數。

例三： $10^3 = 1000$

而 10 + 00 = 10

這裡 $k = 2$，$N = 3$，因此 10 是三次低度完美再現數。

要尋找 N 次再現數並不難，因爲所有滿足同餘式

(1) $A^N \equiv A \pmod{10^n - 1}$

且小於 $10^n - 1$ 的基本解，都是N次再現數，在拙文「豈止『破鏡重圓』」裡，也曾指出過，所有二次再現數，都同時是任意N次再現數。而所有二次再現數減掉 1 後，則是任意奇次再現數。

比方說，703 可驗證是二次再現數，減 1 後是 702，我們有

$$
\begin{aligned}
702^3 &= 345948408 \\
345 + 948 + 408 &= 1701 \\
1 + 701 &= 702 \\
702^5 &= 170484759256032 \\
170 + 484 + 759 + 256 + 032 &= 1701 \\
1 + 701 &= 702 \\
702^7 &= 84015571300409593728 \\
84 + 015 + 571 + 300 + 409 + 593 + 728 &= 2700 \\
2 + 700 &= 702 \\
&\cdots\ \cdots
\end{aligned}
$$

N次完美再現數的搜尋

當$N = 2$ 的時候，也就是西方數學家所稱的Kaprekar Numbers，而筆者

近期也在網上讀到一篇關於三次完美再現數的英語論文*Kaprekar Triples* [3]，是去年才發表的。可見，有關*N*次完美再現數，有系統的研究尚不多。

要尋找二次以上的完美再現數，方法通常是在求出 (1) 式的基本解後，逐個檢驗它們是否符合上文提到的 *N* 次完美再現數的三項條件，符合的，是完美再現數，不符合的，就只是普通的再現數。除了這個方法，筆者目前也沒有別的更好的方法。

爲了讓大家能具體地看到實際搜尋 Kaprekar Numbers 的做法，以下以尋找四位數裡的三次及五次的完美再現數爲例。

尋找四位三次完美再現數，如上文所說，要先求出 (1) 式裡 $N = 3$，$n = 4$ 的解。即須解同餘方程

(2) $$A^3 \equiv A \pmod{9999}$$

按同餘式的理論，(2) 式等價於聯立同餘式組：

(3) $$\begin{cases} A^3 \equiv A \pmod{9} \\ A^3 \equiv A \pmod{11} \\ A^3 \equiv A \pmod{101} \end{cases}$$

由於 (3) 式裡的模數都很少，我們甚至可以用電腦試算表來求得各式的解而不必懂得及使用同餘式在理論上的解法。(3) 式裡的初步解是

(4) $$\begin{cases} A \equiv 0, 1, 8 \pmod{9} \\ A \equiv 0, 1, 10 \pmod{11} \\ A \equiv 0, 1, 100 \pmod{101} \end{cases}$$

所以，據中國剩餘定理，(2) 式共有 27 個解：

$A \equiv 7777\,p + 7272\,q + 4950\,r \pmod{9999}$，其中 $p = 0, 1, 8$、$q = 0, 1, 10$、$r = 0, 1, 100$。經實際算出，這 27 個解是

$$\begin{aligned} A \equiv\ & 0, 1, 100, 505, 2222, 2223, 2322, 2727, 2728, \\ & 2827, 4445, 4545, 4949, 4950, 5049, 5050, 5455, 5554, \\ & 7172, 7271, 7272, 7677, 7776, 7777, 9494, 9899, 9998 \pmod{9999} \end{aligned}$$

不過，經過檢驗，這 27 個基本解，只有九個是完全符合完美再現數的條件的，它們是 2322、2728、4445、4544、4949、5049、5455、5554、7172。

類似地，當 (1) 式裡 $N = 5$，$n = 4$，同餘方程就變成

(5) $$A^5 \equiv A \pmod{9999}$$

它等價於聯立同餘方程組

(6) $$\begin{cases} A^5 \equiv A \pmod{9} \\ A^5 \equiv A \pmod{11} \\ A^5 \equiv A \pmod{101} \end{cases}$$

以相類的方法，可以算出 (5) 式有 45 個解：

$A \equiv 7777\,p + 7272\,q + 4950\,r \pmod{9999}$，其中 $p = 0 , 1 , 8$、$q = 0 , 1 , 10$、$r = 0 , 1 , 10 , 91 , 100$。

可是，由於次數高了，在今次的 45 個解裡，僅有 7776 這個唯一的數字能完全符合完美再現數的條件。其中 1000 則是五次低度完美再現數。

說來，筆者過去曾斷斷續續的尋得一些高次完美再現數的，最近有了較強的計算程式，也很幸運的找到六次和七次完美再現數的具體例子。下面簡略的匯報一下筆者的搜尋結果，但由於二次完美再現數太易找得，故下文中不會多談。

一位數的情況

雖然只是一位數，但居然也可以有四次完美再現數，委實有些不可置信哩！

$$9^2 = 81, \qquad 8 + 1 = 9$$
$$8^3 = 512, \qquad 5 + 1 + 2 = 8$$
$$7^4 = 2401, \qquad 2 + 4 + 0 + 1 = 7$$

事實上，筆者很少見有文獻提及 7^4的例子，因爲除了在文獻 [4] 裡見過，便再想不起在別的地方見過。似乎是大家都覺得不可能在一位數中存在四次完美再現數吧，而把這三個一位完美再現數並列展示，恐怕也是很

罕見的呢！

二位數的情況

最特別的是 45，它在 $N = 2, 3, 4$ 時都是完美再現數，即有

$$45^2 = 2025, \quad 30 + 25 = 45$$
$$45^3 = 91125, \quad 9 + 11 + 25 = 45$$
$$45^4 = 4100625, \quad 4 + 10 + 06 + 25 = 45$$

筆者所尋得的完美再現數，很少能像 45 這樣連續三個方次都能「保持完美」的！

55 則稍遜一些，它只是在 $N = 2$ 和 4 時是完美再現數：

$$55^2 = 3025, \quad 20 + 25 = 55$$
$$55^4 = 9150625, \quad 9 + 15 + 06 + 25 = 55$$

筆者所搜尋得的四次至七次的二位完美再現數，其實除了上面已經亮過相的 45 和 55，就只有 67 這個四次完美再現數了：

$$67^4 = 20151121, \quad 20 + 15 + 11 + 21 = 67$$

大抵是二位數的位數太少了，很難出現高次方的完美再現數。

三位數的情況

三次完美再現數只有一個：

$$297^3 = 26198073, \quad 26 + 198 + 073 = 297$$

四次完美再現數也只有一個：

$$433^4 = 35152125121, \quad 35 + 152 + 125 + 121 = 433$$

五次至七次的完美再現數卻一個都找不到。原因也許還是位數太少吧。

四位數的情況

如上面的實例所得，三次完美再現數有九個：2322、2728、4445、4544、4949、5049、5455、5554、7172。其中 2728 同時是二次完美再現數。

四次完美再現數有兩個：4950，5050，兩個數同時是二次完美再現數！

五次完美再現數有一個：

$7776^5 = 28430288029929701376$，

$2843 + 0288 + 0299 + 2970 + 1376 = 7776$

這也許是最小的一個五次完美再現數！至於六次及七次的完美再現數則找不到。

五位數的情況

三次完美再現數有五個：27100、44443、55556、60434、77778。其中 77778 同時是二次完美再現數。

四次完美再現數有兩個：38212、65068

五次完美再現數有三個：27100、73440、95120

這裡，27100 同時是三次及五次完美再現數。六次及七次的完美再現數找不到。

六位數的情況

最特別的是 499500 和 500500 兩個數，是同時是二、三、四次完美再現數。事實上，我們還有兩個金字塔型數列：

4950 , 499500 , 49995000 , 4999950000 , 499999500000 , $\cdots$
5050 , 500500 , 50005000 , 5000050000 , 500000500000 , $\cdots$

在這兩個數列裡，除了開始的第一個數 4950 及 5050 只是二次兼四次完美再現數外，往後的每個數，都是同時是二、三、四次完美再現數！這兩個數列的通項爲 $5 \times 10^n - 1\ (10^n \pm 1)$，當中$n \geq 2$。當然，我們還可以把兩位數的 45 和 55 都拉進來作爲數列的首項，只遺憾 55、4950 及 5050 都不是三次完美再現數。值得一提，文獻 [2] 裡亦指出，當$n \geq 2$，$5 \times 10^{3n-1} + 5 \times 10^{n-1}$是 $4n$位三次低度完美再現數！它跟這裡的第二個數列頗相似。

此外，329967、461539、533170、791505 這四個六位數都同時是二次及三次完美再現數。

三次和四次完美再現數在六位數中比較多，三次的有三十五個，四次的更有三十七個。五次的完美再現數也有七個：

$$500499^5 = 31406\ 249062\ 033782\ 183750\ 002499$$
$$505791^5 = 33102\ 095432\ 189229\ 078077\ 109951$$
$$540539^5 = 46146\ 117682\ 034200\ 315812\ 026699$$
$$598697^5 = 76919\ 315312\ 001453\ 031756\ 173257$$
$$665335^5 = 130377\ 260305\ 079059\ 111219\ 084375$$
$$697598^5 = 165206\ 120951\ 064038\ 339435\ 007968$$
$$732347^5 = 210661\ 190534\ 180357\ 124288\ 026507$$

六次的完美再現數仍然找不到，可是七次的完美再現數卻僥倖找到一個：

$$692900^7 = 76682\ 087899\ 306122\ 161297\ 060900\ 000000\ 000000$$
$$76682 + 087899 + 306122 + 161297 + 060900 + 000000 + 000000 = 692900$$

六次及以上的完美再現數

從一位數至七位數，筆者一直找不到六次完美再現數的具體例子。直至八位數，才終於找到一個：

$$64727568^6 = 7354205\ 10287688\ 10070052\ 11142669\ 22070330\ 03802624$$
$$7354205 + 10287688 + 10070052 + 11142669 + 22070330 + 03802624 = 64727568$$

事實上，也可以估計得到，當 N 越大，完美再現數的出現概率越小。我們不妨看看剛才那個六次完美再現數，分成六截後，每個數的最前端的數都只能是 0、1、2（按：7354205 那一截應是 07354205），那才能有機會符合完美再現數的第一項條件。可見，每多分一截，機會率就要多乘一個 0.3，當 N 再增大，乘的更應是 0.2 以至 0.1。顯見要找到八次、九次完美再現數是很渺茫的，只是，我們卻不能由此認爲它們根本不存在。

水仙花數

筆者覺得，尋找這種完美再現數雖然看來只是數字遊戲，不過它應該是訓練程式編寫的好材料。上面的高次完美再現數的搜尋固是好例子，而本節所要介紹的水仙花數，也是一個極好例子，因爲筆者在網上就見過，

曾有電腦程式專業的試題就是設計一個找水仙花數的程式哩！

人們熟知的水仙花數是：

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

具同樣再現性質的水仙花數還有 370、371、407。

我們只要善加運用試算表，就不難找到「兩位三次」的水仙花數：

$$4^3 + 18^3 + 33^3 = 41833$$
$$16^3 + 50^3 + 33^3 = 165033$$

其他「兩位三次水仙花數」還有 221859、336700、341067、407000、444664、487215、982827、983221。

筆者確信，「三位三次」、「四位三次」⋯ 的水仙花數是存在的，不過要搜尋的話，普通家用電腦的試算表都無能爲力了，必須要好好的編寫設計相關的程式才能得出結果。

*N*次低度完美再現數的搜尋

尋找低度完美再現數，依據的仍是 (1) 式的基本解。下述的是其中一種方法：

$A \equiv 45 \pmod{99}$ 是$A^2 \equiv A \pmod{99}$ 的一個基本解。命$B = 45 + 99t$，$t \geq 1$，則當t取適當的值就能得出低度完美再現數。

當$t = 1$，$B = 144$。$144^2 = (6 + 19 + 17 + 36 + 42 + 24)^5 = 61917364224$。

當$t = 2$，$B = 243$。$243^4 = (34 + 86 + 78 + 44 + 01)^4 = 3486784401$、$243^6 = (2 + 05 + 89 + 11 + 32 + 09 + 46 + 49)^6 = 205891132094649$、… 。

在這低度完美的國度裡，要找八、九次方的例子一點都不難，例如我們會有僅由 0 和 1 構成的m位$mk + 1$ 次低度完美再現數：10^{m-1}，它的次數要多高都行呢！下面給出八、九次方的低度完美再現數實例：

$$\begin{aligned} 46^8 &= (2 + 0 + 0 + 4 + 7 + 6 + 1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 9 + 3 + 6)^8 \\ &= 20047612231936 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
440^9 &= (61 + 81 + 21 + 83 + 95 + 09 + 50 + 40 + 00 + 00 + 00 + 00)^9 \\
&= 618121839509504000000000
\end{aligned}
$$

帶倍數的再現數

筆者曾粗略的研究過帶倍數的再現數，也找出過一些具體例子，展示如下：

$$
\begin{aligned}
45^2 &= (20 + 25)^2 &&= 20\ 25 \times 1 \\
90^2 &= (40 + 50)^2 &&= 40\ 50 \times 2 \\
135^2 &= (60 + 75)^2 &&= 60\ 75 \times 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
45^3 &= (9 + 11 + 25)^3 &&= 9\ 11\ 25 \times 1 \\
90^3 &= (18 + 22 + 50)^3 &&= 18\ 22\ 50 \times 4 \\
135^3 &= (27 + 33 + 75)^3 &&= 27\ 33\ 75 \times 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
45^4 &= (4 + 10 + 06 + 25)^4 &&= 4\ 10\ 06\ 25 \times 1 \\
90^4 &= (8 + 20 + 12 + 50)^4 &&= 8\ 20\ 12\ 50 \times 8 \\
135^4 &= (12+30+18+75)^4 &&= 12\ 30\ 18\ 75 \times 27
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2232^3 &= (125 + 1949 + 0248)^3 &&= 125\ 1949\ 0248 \times 1 \\
4464^3 &= (250 + 3898 + 0496)^3 &&= 250\ 3898\ 0496 \times 4 \\
6966^3 &= (375 + 5847 + 0744)^3 &&= 375\ 5847\ 0744 \times 9 \\
9288^3 &= (500 + 7796 + 0992)^3 &&= 500\ 7796\ 0992 \times 16 \\
11610^3 &= (625 + 9745 + 1240)^3 &&= 625\ 9745\ 1240 \times 25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
433^4 &= (35 + 152 + 125 + 121)^4 &&= 35\ 152\ 125\ 121 \times 1 \\
866^4 &= (70 + 304 + 250 + 242)^4 &&= 70\ 304\ 250\ 242 \times 8 \\
1299^4 &= (105 + 456 + 375 + 363)^4 &&= 105\ 456\ 375\ 363 \times 27 \\
1732^4 &= (140 + 608 + 500 + 484)^4 &&= 140\ 608\ 500\ 484 \times 64 \\
2165^4 &= (175 + 760 + 625 + 605)^4 &&= 175\ 760\ 625\ 605 \times 125 \\
2598^4 &= (210 + 912 + 750 + 726)^4 &&= 210\ 912\ 750\ 726 \times 216
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1188^2 &= (352 + 836)^2 &&= 352\ 836 \times 4 \\
1188^3 &= (104 + 792 + 292)^3 &&= 104\ 792\ 292 \times 16 \\
1188^4 &= (31 + 123 + 310 + 724)^4 &&= 31\ 123\ 310\ 724 \times 64
\end{aligned}
$$

$$1188^5 = (9 + 243 + 623 + 285 + 028)^5 = 9\,243\,623\,285\,028 \times 256$$

偶完全數與廣義Kaprekar數

在文獻 [2] 裡，舉出了一組由偶完全數構成的例子：

$$28^3 = 5 \times 64^2 + 23 \times 64, \qquad 5 + 23 = 28$$
$$496^3 = 116 \times 1024^2 + 380 \times 1024, \qquad 116 + 380 = 496$$
$$8128^3 = 2000 \times 16384^2 + 6128 \times 16384, \qquad 2000 + 6128 = 8128$$

這幾行數式，都具有完美再現數的特徵，只是，它們不是 10 進的，卻是 64 進，1024 進和 16384 進的，可以說是廣義的完美再現數或 Kaprekar 數。

筆者蠻有興趣的檢驗過，28 還可以是四次的廣義完美再現數，8128 還可以是四次及五次廣義完美再現數，而 496 更同時可以是四至六次廣義完美再現數。且用下面的方式來表述吧：

$$28^3 = (5 , 23 , 0)_{64}, \qquad 5 + 23 + 0 = 28$$
$$28^4 = (2 , 22 , 4 , 0)_{64}, \qquad 2 + 22 + 4 + 0 = 28$$

$$8128^3 = (2000 , 6128 , 0)_{16384}, \qquad 2000 + 6128 + 0 = 8128$$
$$8128^4 = (992 , 6112 , 1024 , 0)_{16384}, \qquad 992 + 6112 + 1024 + 0 = 8128$$
$$8128^5 = (492 , 5080 , 2556 , 0 , 0)_{16384}, \qquad 492 + 5080 + 2556 + 0 + 0 = 8128$$

$$496^3 = (116 , 380 , 0)_{1024}, \qquad 116 + 380 + 0 = 496$$
$$496^4 = (56 , 376 , 64 , 0)_{1024}, \qquad 56 + 376 + 64 + 0 = 496$$
$$496^5 = (27 , 310 , 159 , 0 , 0)_{1024}, \qquad 27 + 310 + 159 + 0 + 0 = 496$$
$$496^6 = (13 , 230 , 237 , 16 , 0 , 0)_{1024}, \qquad 13 + 230 + 237 + 16 + 0 + 0 = 496$$

眾所周知，偶完全數有很多奇妙的性質，想不到它跟再現數亦有淵源，真有些神秘莫測。

平方分差再現數

現在且回過頭來，看看本文開始時提到的那位台灣學生邱鈺茜的「雷霆數」，其實，要是直觀一點，這種數應命名爲「平方分差再現數」吧。這種數過去確是沒有人提出過，邱氏是以逆向思維首先想到並提出的，讓人

耳目一新。我們由此也見出逆向思維的重要之處！

沒有看過邱氏的論文，但筆者以自己的方法，也找到一些實例。這種數，應有兩種模式：

(7) $$\begin{cases} a-b=c \\ c^2=10^n a+b \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} a-b=c \\ c^2=10^n b+a \end{cases}$$

(7) 式整理後得 $a = \dfrac{c(c+1)}{10^n+1}$ ，根據這個關係，發覺除了

$11^2 = 121$，	$12-1 = 11$
$101^2 = 10201$，	$102-01 = 101$
$1001^2 = 1002001$，	$1002-001 = 1001$

……

之外，再無別的合條件的解。

同樣地，對 (8) 式也可作類似的整理，得 $b = \dfrac{c(c-1)}{10^n+1}$ ，根據這個關係，一個較便捷的做法便是求出下列同餘式的基本解：

(9) $$c(c-1) \equiv 0 \pmod{10^n+1}$$

於是由這些基本解會得出若干組 b 和 c 的值，再將之代入 (8) 式，看看能否解出 a 的整數解來。下面是筆者使用這個方法找到的不少合條件的解：

$078^2 = 6\,084$，	$084-6 = 078$
$287^2 = 82\,369$，	$369-82 = 287$
$364^2 = 132\,496$，	$496-132 = 364$
$1096^2 = 120\,1216$，	$1216-120 = 1096$
$18183^2 = 3306\,21489$，	$21489-3306 = 18183$
$336634^2 = 113322\,449956$，	$449956-113322 = 336634$

$$2727274^2 = 743802\ 3471076，\quad 3471076 - 743802 = 2727274$$
$$23529412^2 = 5536332\ 29065744，\quad 29065744 - 5536332 = 23529412$$
$$333666334^2 = 111333222\ 444999556，444999556 - 111333222 = 333666334$$

嗯，這裡又出現另一個數列了：364 , 336634 , 333666334 , 333366663334 , … …

筆者不知道那位邱同學有沒有向高次的情況推進，事實上，這也將會是很有趣的事情。容易看到，(9) 式和 (1) 式很相像，但一個的模數是 $10^n + 1$，一個的模數是 $10^n - 1$。

由於我們有 $10^n \equiv -1 \pmod{10^n + 1}$，所以我們完全可以仿效文首甲部裡對$N$次再現數的定義：

若正整數B的N次方$A^N = d_k \times 10^{(k-1)n} + \ldots + d_3 \times 10^{2n} + d_2 \times 10^n + d_1$，這裡，$10^n - 1 \geq d_1 , d_2 , d_3 , \ldots , d_n \geq 0$（但$d_1$必須大於 0），$n > 0$，滿足 $(-1)^{k-1}d_k + (-1)^{k-2}d_{k-1} + \ldots + (-1)^2d_3 + (-1)d_2 + d_1 \equiv B^N \equiv B \pmod{10^n + 1}$，則我們稱$B$爲$N$次累乘分段和差相間再現數。（對於數的整除性有研究的讀者到此相信亦會迅速聯想到與 $10^n \equiv -1 \pmod{10^n + 1}$ 有關的快速餘數算法。）

於是，要找這種「N 次累乘分段和差相間再現數」，就相當於尋找下列同餘方程的基本解：

(10) $\qquad B^N \equiv B \pmod{10^n + 1}$

不過，這裡還未在其再現的完美性方面作出限制性定義，或者請讀者試試看吧。然而，由於這種再現數是和差相間地運用，在高次方的時候仍然可以完美再現的概率，就比N次完美再現數的大得多。且以 364 這個數爲例，除了有 $364^2 = 132\ 496$，$496 - 132 = 364$；其實還有：

$$364^3 = 48\ 228\ 544 \qquad 544 - 228 + 48 = 364$$
$$364^4 = 17\ 555\ 190\ 016，\qquad 016 - 190 + 555 - 17 = 364$$
$$364^5 = 6\ 390\ 089\ 165\ 824，\quad 824 - 165 + 089 - 390 + 6 = 364$$
$$364^6 = 2\ 325\ 992\ 456\ 359\ 936，$$
$$936 - 359 + 456 - 992 + 325 - 2 = 364$$
$$364^7 = 846\ 661\ 254\ 115\ 016\ 704，$$

$$704 - 016 + 115 - 254 + 661 - 846 = 364$$

到了八次方，才再現不了，九次及十次方的筆者也試過了，都再現不了，但說不定到了某個更高的方次，又能再現的。比方說，筆者另外找到一個具同樣性質的三位數 715，它在二次方的時候不能再現，可是從三次方起是能再現的：

$715^3 = 365\ 525\ 875$， $875 - 525 + 365 = 715$

$715^4 = 261\ 351\ 000\ 625$， $625 - 000 + 351 - 261 = 715$

… …

這樣一直到十次方都能再現，而在十一和十二次方時不能再現，但在十三次方的時候，卻又能再現了！

二平方差再現數

得知邱鈺茜的逆向思維案例，讓筆者也想來一次逆向思維的嘗試，於是想到多年前見過在文獻 [4] 裡所記述的一種數式：

$$12^2 + 33^2 = 1233$$
$$88^2 + 33^2 = 8833$$

當時曾順著思路，找過一些同類型的實例，如

$$588^2 + 2353^2 = 5882353$$
$$25840^2 + 43776^2 = 2584043766$$

於是便試著逆向想想，式子裡的加號能否變為減號？研究後發覺是可以的。我們從下面的二次不定方程出發：

$$x^2 - y^2 = 10^n x + y$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 10^n x - (y^2 + y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{10^n \pm \sqrt{(10^n)^2 + 4(y^2 + y)}}{2}$$

命 $$k^2 = (10^n)^2 + 4(y^2 + y)$$

整理得 $$y^2 + y + \frac{(10^n)^2 - k^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \{(10^n)^2 - k^2\}}}{2}$$

復命 $$j^2 = 1 - \{(10^n)^2 - k^2\}$$

$$\Rightarrow \qquad k^2 - j^2 = (10^n)^2 - 1$$

由此可知，關鍵是尋找 $(10^n)^2 - 1$ 的平方差表達式。

經過計算和檢驗，果然找到一批二平方差再現數的實例：

$$\begin{aligned}
1140^2 - 399^2 &= 1140399 \\
1216^2 - 512^2 &= 1216512 \\
1416^2 - 767^2 &= 1416767 \\
10234^2 - 1547^2 &= 102341547 \\
10266^2 - 1652^2 &= 102661652 \\
101010^2 - 10100^2 &= 10101010100 \\
1018156^2 - 137327^2 &= 1018156137327
\end{aligned}$$

$$\cdots\ \cdots$$

這看來應是一批從未「見過世面」的美麗數式吧！

寫到這裡，想對上面談過的 Kaprekar Numbers 及各種再現數做一個總結。首先是但凡再現數，都總不免與不定方程、數的整除性以及同餘式理論有關連，所以與這些數有關的問題，雖然數字遊戲的成份很重，卻也必須具備一定的數學知識才能容易在找尋這些數時有收穫。事實上，筆者就發覺，要找尋高次的完美再現數，就幾乎必須掌握初等數論裡的全部同餘式知識。不過，在二次的最初階的情況裡，除了使用同餘式，其實還有很多方法可用，如代數的或簡單的整除性分析的方法等，在文獻 [5] 裡，就有豐富的介紹，老師們可以多加參考，相信讀後亦可以引導學生不拘一格地解決問題，並且也可讓學生明白，對數學工具認識得越多，掌握得越好，解決起問題來就越是得心應手。其次，正由於這些再現數充滿奇巧，很能吸引人，即使原本對數學感到枯燥的同學，也可能會爲之回眸觀賞。

再說，在前面文中亦早已提到，當 N 越大，完美再現數的出現概率越小，要找到八次、九次完美再現數是很渺茫的，只是，我們卻不能由此認爲它們根本不存在。因爲概率縱微小，亦從來不等於不存在，於是要麼我們想方設法證明到了某個方次，完美再現數不再存在，要麼我們改良搜尋

的數學方法和搜索程式，務要把更高次的完美再現數找出來，這樣的話，對 Kaprekar Numbers 的研究就不再是數字遊戲，而是嚴肅的數學問題。上文提及的水仙花數，就是一例，已經有人證明，一位 n 次水仙花數，n 最大只能是 60，而人們也正想方設法要把 $n \leq 60$ 的所有一位 n 次水仙花數尋找出來，可是進展並不是很大呢！[6]

末了，關於再現數的類型，筆者相信還有很多是我們未見過的，它們尚潛藏在浩瀚的自然數裡，須待我們以豐富的想像力與創造力去把他們發掘出來，邱鈺茜應算是爲我們做了最新的發掘工作吧！或者，有一天學生在你的啓發下亦有全新的發現！

參考資料

[1] http://www.cdn.com.tw/live/2005/11/29/text/941129e9.htm

[2] 黃志華（1997）。「豈止『破鏡重圓』」。《數學教育》第四期（6/97）91 – 93 頁。

[3] http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Iannucci/iannucci45.pdf

[4] 池野信一、高木茂男、土橋創作、中村義作（1976）。《數理 puzzles》。日本：中央公論社，51 頁。

[5] 談祥柏（1996）。《數：上帝的寵物》。上海教育出版社，83 – 87 頁。

[6] http://blog.chinaunix.net/article.php?articleId=1666&blogId=463

作者電郵：cayvrickywong@netvigator.com