「牛吃草」問題：從圖解到牛頓解

陳麗萍
東華三院港九電器商聯會小學下午校
馮振業
香港教育學院數社科技學系

引子

香港數學教育學會十週年會慶發行了一套以名題欣賞爲主題的書籤，其中一題就是著名的「牛吃草」問題：

> 3 頭牛在二星期裡，吃完了 2 畝地上所有的草；而 2 頭牛在四星期裡能吃完 2 畝地上所有的草。要多少頭牛，能在六星期中吃完 6 畝地上所有的草？
>
> （香港數學教育學會，2005）

如果沒考慮到地上會長出新草，單以 3 頭牛吃二星期的草量和 2 頭牛吃四星期的草量比較，很容易會認爲不可能同由 2 畝地供給，因前者等同 1 頭牛吃六星期的草量，而後者卻等同 1 頭牛吃八星期的草量，兩者不可能相等！

表面看來，問題涉及牛數、土地面積和時間三個變量。然而，如果忽略了草量這個關鍵變量，以及它與土地面積和時間的關係，將不可能成功求解。由於要處理的關係較多，一般會認爲此題較適合中學生以代數方法計算（見附錄一）。事實上，原題出自英國數學家牛頓（Isaac Newton）的《廣義算術》（*Arithmetica Universalis*），數值也比較複雜些。學會書籤列出的一題，換上了較簡單的數值，有利於高小學生以畫圖方法求解。

本文旨在介紹以畫圖方法求解「牛吃草」問題，讓讀者拿來和牛頓的原解對照參考。

兩個解法

要解「牛吃草」問題，必須作出下列假設：

假設 1　開始時（即牛還未開始吃草時），土地上的草量與面積成正比例；

假設 2　在相同面積的土地上，長出新草的數量，與時間成正比例；
假設 3　在同一時間內，長出新草的數量，與土地面積成正比例；
假設 4　每頭牛在任何一單位時間內吃的草量都相等。

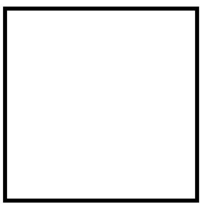
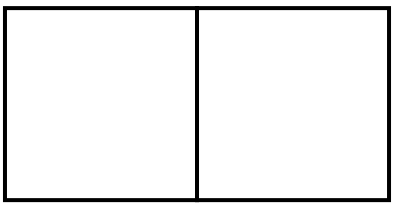
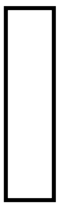
直接考慮土地面積和牛數，或利用上面這些假設，可以推得（見附錄二）：

命題 5　如果在同一時間內吃完地上的所有草，土地面積與牛數成正比例。

問題的已知條件和所求，可以表列如下：

牛數（頭）	土地面積（畝）	時間（星期）
3	2	2
2	2	4
?	6	6

爲了在方便解說，和顯示高小學生可能用上的非正規表達的需要之間取得平衡，以下展示的畫圖推算過程，刻意採用水平劃分表達牛數，鉛垂劃分表達吃草時間。當要同時表達草量和牛吃草的情況，便需把圖畫重疊考慮。爲免交錯圖線妨礙解說，有時會把長草部分適當地調移（如圖一和圖七）。

先以  代表一畝地的草量，那麼 2 畝地開始時就有草（假設 1）：。以  代表一畝地在一週內長出的草量（假設 2、3），那麼我們大概可以有下列兩種入手的方法：

<u>方法一</u>

在沒有牛吃的情況下，2 畝地二星期後就有草（假設 2、3）：

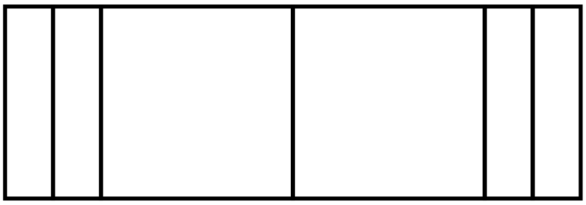


圖　一

已知 3 頭牛在二星期裡，吃完了 2 畝地上所有的草。1 頭牛在二星期裡，就吃掉了下面陰影部分的草（假設 4）。

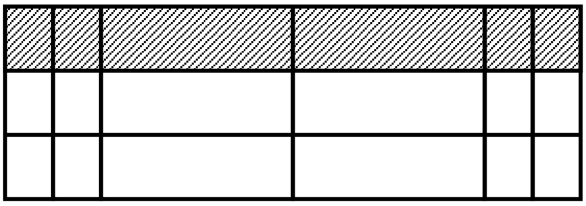


圖　二

因此，1 頭牛在一星期裡，就吃掉了下面陰影部分的草（假設 4），即 $\frac{1}{3}$ 畝地上的草量，再加上每畝地在 $\frac{2}{3}$ 星期內長出的草量。

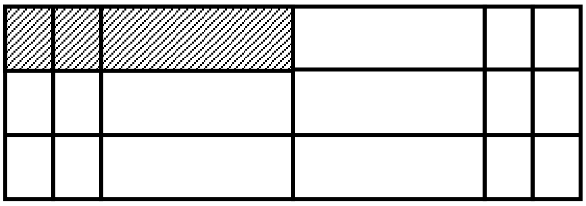


圖　三

另一方面，在沒有牛吃的情況下，2 畝地四星期後就有草（假設 2、3）：

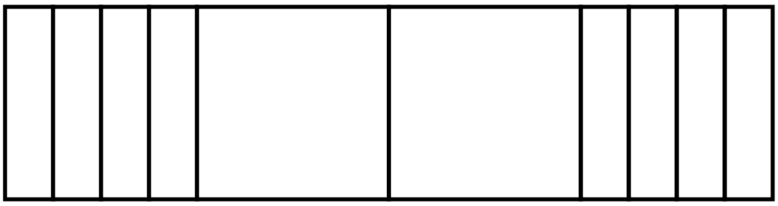


圖　四

已知 2 頭牛在四星期裡，能吃完 2 畝地上所有的草。1 頭牛在四星期裡，就吃掉了下面陰影部分的草（假設 4）。

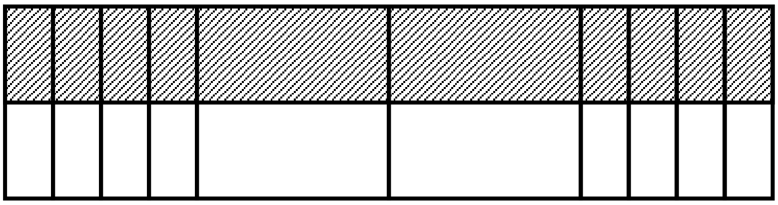


圖　五

因此，1 頭牛在一星期裡，就吃掉了下面陰影部分的草（假設 4），即 $\frac{1}{4}$ 畝地上的草量，再加上每畝地在 1 星期內長出的草量。

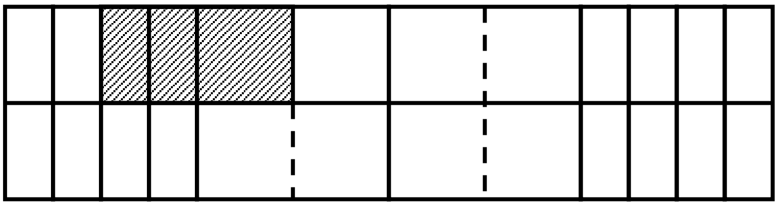
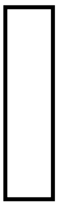
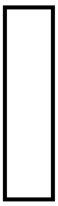


圖　六

與前面的圖三比較，便知：

$\frac{1}{3}$ 畝地上的草量 + 1 畝地在 $\frac{2}{3}$ 星期內長出的草量 = $\frac{1}{4}$ 畝地上的草量 + 1 畝地在 1 星期內長出的草量

因此，的 $\frac{1}{3}$ 便是 $(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$ 畝地的草量，即 $\frac{1}{12}$ 畝地的草量。由此求得實爲 $\frac{1}{4}$ 畝地的草量，進而算出 1 頭牛一星期吃掉 $\frac{1}{2}$ 畝地的草量。

在沒有牛吃的情況下，6 畝地六星期後就有 $(6 + \frac{1}{4} \times 6 \times 6)$ 畝地的草量（假設 2、3），即 15 畝地的草量。分六星期吃，每星期要吃 $\frac{15}{6}$ 畝地

的草量。故需牛 $(\frac{15}{6} \div \frac{1}{2})$ 頭，即 5 頭。

方法二

在沒有牛吃的情況下，2 畝地二星期後就有草（假設 2、3）：

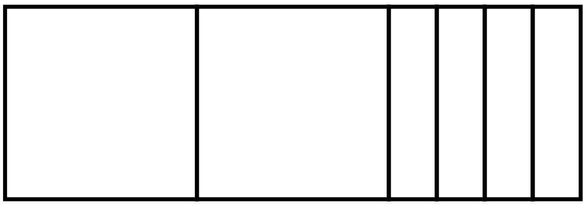


圖　七

這些草由 3 頭牛用二星期吃完，表示若把圖七等分成 6 份（如圖八），則每份（陰影部分）表示 1 頭牛每星期的吃草量（假設 4）。

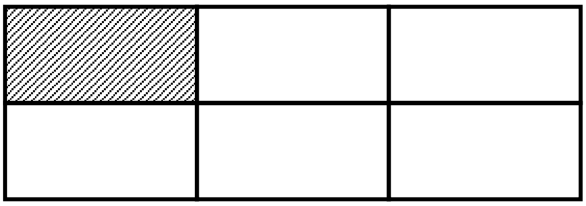


圖　八

同理，在沒有牛吃的情況下，2 畝地四星期後就有草（假設 2、3）：

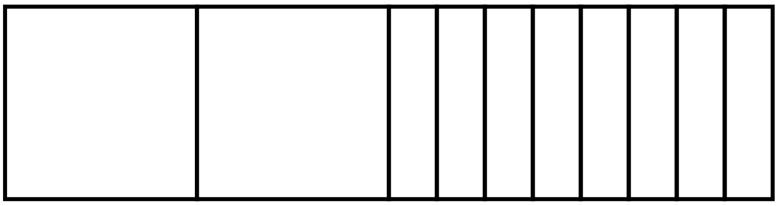


圖　九

這些草由 2 頭牛用四星期吃完，表示若把圖九等分成 8 份（如圖十），則每份（陰影部分）亦表示 1 頭牛每星期的吃草量（假設 4）。

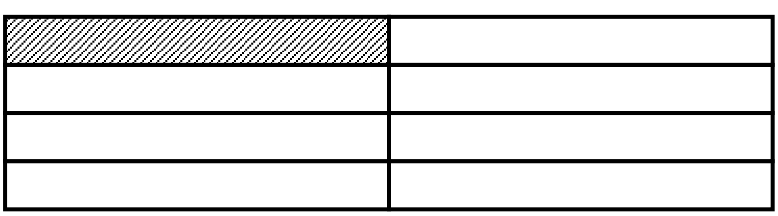
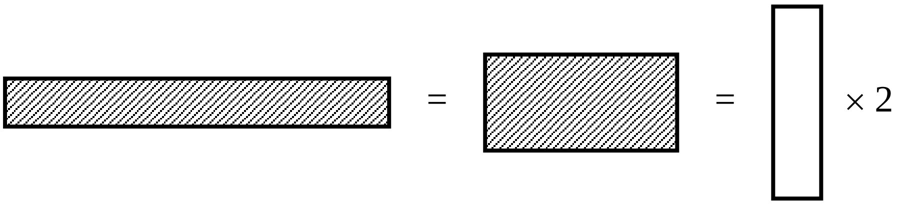


圖　十

考慮圖十和圖八的陰影部分同樣表示 1 頭牛每星期的吃草量，那麼兩圖所表示的整體草量差額（即 8 頭牛每星期總吃草量和 6 頭牛每星期總吃草量的差額），便剛好是 1 頭牛每星期的吃草量的 2 倍（假設 4）。再以圖九和圖七的差額比較，便知 1 頭牛每星期的吃草量的 2 倍 = 一畝地在一週內長出的草量的 4 倍，即

1 頭牛每星期的吃草量 = 一畝地在一週內長出的草量的 2 倍..... (1)

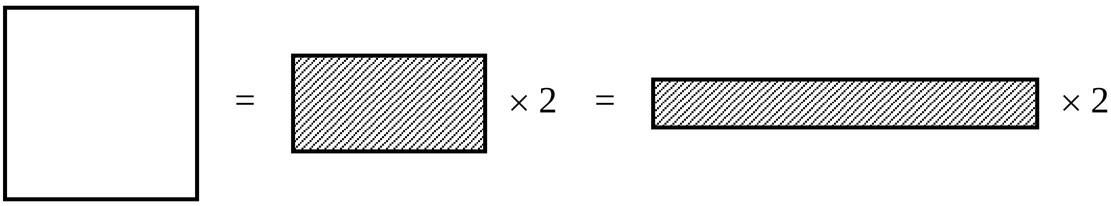
用圖表示，就是：



以 (1) 的關係放入圖七和圖八（也可用圖九和圖十），便知

一畝地的草量 = 1 頭牛每星期的吃草量的 2 倍 .... (2)

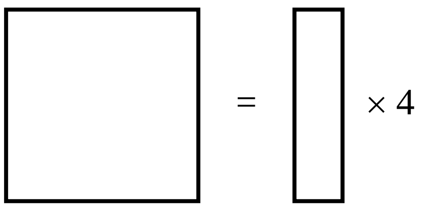
用圖表示，就是



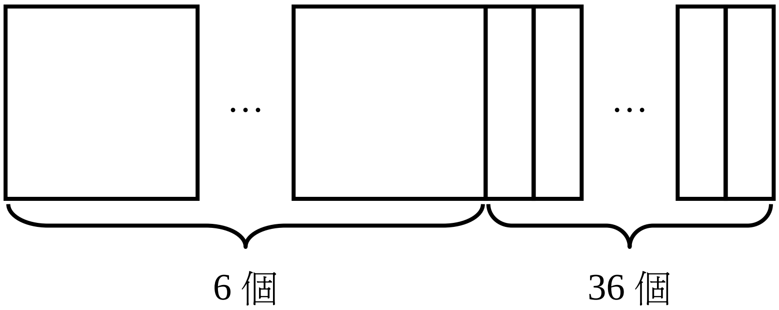
由 (1) 和 (2) 可知

一畝地的草量 = 一畝地在一週內長出的草量的 4 倍 .... (3)

用圖表示，就是



在沒有牛吃的情況下，6 畝地六星期後就有草（假設 2、3）：



由 (3) 得知這草量等同 $(6+\frac{36}{4})$ 畝地的草量，即 15 畝地的草量。另一方面，由 (2) 可知 1 頭牛六星期吃掉 $\frac{6}{2}$ 畝地的草量，即 3 畝地的草量。要在六星期內吃掉 15 畝地的草量，便需牛 $\frac{15}{3}$ 頭，即 5 頭。

簡單來說，方法一是透過比較兩種已知情況下，每頭牛一週的吃草量，找出一畝地在一週內長出的草量，相當於多少畝土地上的草量，即上面正方格和長方格的換算公式；而方法二則是透過比較兩種已知情況下，耗草量的差異，找出同樣的換算公式。

細心分析，不難發現，方法一的關鍵一步，實際上是從 $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=\frac{1}{4}x+y$ 中找到（正方格 x 和長方格 y 的）換算公式的，其中代數味道不輕。相反地，方法二避過了較繁複的移項，但卻借助了土地面積相等的方便（同是 2 畝）。一般而言，不能希望這有利情況會出現，例如碰上牛頓的原題（Newton *et al.*, 1707, pp.68 – 70），我們便沒有那麼幸運：

	牛數（頭）	土地面積（畝）	時間（星期）
A	12	$3\frac{1}{3}$	4
B	21	10	9
C	?	24	18

理論上，方法一還是可以用的，不過移項工作卻非常倒胃，倒不如乾脆列方程罷了。反觀方法二，可以在將 A 的資料改寫成下面形式（命題 5）後照搬無誤。

	牛數（頭）	土地面積（畝）	時間（星期）
D	36	10	4

抓著土地面積同為 10 畝的好處，不難依樣葫蘆地找到 36 頭牛這個答案，此處從略。總括而言，當兩種已知情況之中含有相同的土地面積，求解將較容易。或許牛頓也這樣想，才刻意安排 $3\frac{1}{3}$ 和 10，使只需把前者乘以 3 即可得到土地面積相同的好處。

牛頓的解法

牛頓在他的書中並未用上上述塗格的方法，他的解法建基於嫻熟的正反比例運用。除了上述四個假設的正比例關係和命題 5 外，他還巧妙地用上：

命題 6　若土地上的草不變，牛數與吃掉所有草所需的時間成反比例。

牛頓是這樣算的：他利用 D 的資料和命題 6 得知，如果 4 星期後土地再不會長出新草，則

16 頭牛便會用 9 星期吃完 10 畝地上的所有草；............................ (4)

8 頭牛便會用 18 星期吃完 10 畝地上的所有草。............................ (5)

這兒的 9 星期和 18 星期，是由 B、C 的資料決定的。接著以 (4) 和 B 比較，便知

10 畝地在 5 星期（9 星期 $-$ 4 星期）長出的新草，剛好供 5 頭牛（21 頭牛 $-$ 16 頭牛）用 9 星期吃光。.. (6)

利用 (6)、假設 2 和 4，便知 10 畝地在 14 星期（由 (5) 的 18 星期和 D 的 4 星期的差得出）長出的新草，剛好供 $\frac{5\times 14}{5}$ 頭牛用 9 星期吃光。接著再用命題 6 便可算得

10 畝地在 14 星期長出的新草，剛好供 7 頭牛（由 $\frac{5\times 14}{5\times 2}$ 頭牛得出），用 18 星期（即 9×2 星期）吃光。.. (7)

再比較 (5) 和 (7)，便知

15 頭牛（由 (7) 的 7 頭牛加上 (5) 的 8 頭牛而得）會用 18 星期吃完 10 畝地上的所有草。.. (8)

最後比較 C 和 (8)，利用命題 5，即得答案為 $\frac{15\times 24}{10} = 36$ 頭。

結語

直至目前，還未有碰上帶領小學生解「牛吃草」問題的實驗報告。如果學生有一定的畫圖解題訓練，書籤上的「牛吃草」問題應是頗有趣味的。對中學生而言，可用的代數工具不少，自然也會想出五花八門的解法。

附錄一

除了學會提供的，較適合初中學生的解法（詳見香港數學教育學會，2005），也可把「牛吃草」問題換個面相，讓高中生試試。用變分的語言，把假設 1 至 4 重寫如下：

草量 G 的一部分隨土地面積 L 正變，另一部分隨土地面積 L 和時間 T 聯變，故可有下列關係式：

$$G = hL + kLT$$

其中 h 和 k 為變分常數。

另一方面，耗草量 E 隨牛數 N 和時間 T 聯變，故可有下列關係式：

$$E = qNT$$

其中 q 為變分常數。

由書籤題的兩已知情況可得下列聯立方程：

$$\begin{cases} 2h + (2)(2)k = (3)(2)q \\ 2h + (2)(4)k = (2)(4)q \end{cases}$$

求解得：$\frac{h}{q} = 2$，$\frac{k}{q} = \frac{1}{2}$ .... (#)

設當 $L = 6$、$T = 6$、$N = x$ 時，$G = E$，便有下列等式：

$$6h + (6)(6)k = 6xq$$

把 (#) 代入，即可解得 $x = 5$。

附錄二

利用附錄一的變分表達方式，若 T 變爲常數，且 $G = E$，便有 $L = p\,N$，其中 p 爲常數，即 L 和 N 成正比例。

參考資料

香港數學教育學會（2005）。書籤：數學名題欣賞系列之一，英國牛頓牧牛吃草問題。於 2006 年 4 月 24 日下載自 http://www.hkame.org.hk/bookmark2005/bkmk-1.html

Newton, I., Halley, E., & Whiston, W. (1707). *Arithmetica universalis; sive de compositione et resolutione arithmetica liber by Sir I. Newton. Cui accessit halleiana µquationum radices arithmetice inveniendi methodus*. Cantab. &c.

作者電郵：pansyclp@yahoo.com.hk

《數學教育》第二十一期
勘誤表

第 43 頁文章標題：「爲何不學幾何？」應爲「爲甚麼不學幾何？」