以「個案研究」溫習概率

許慧貞

在 2005 年，筆者曾於兩次兼職教學中爲中五學生溫習概率，現將一些當時的嘗試及思考記下，望收拋磚引玉之效。

學生已掌握一些關於概率的初步觀念，是對於一些未必發生但有可能發生的事件，計算它們發生的機會有多大。可是，學生要將一些正規的定義、基本概念及定律弄明白並運用自如，確有一定的難度。

與其用常規的練習尋求一鱗半爪，何不以個案整體說明以窺全豹呢？

於是，筆者嘗試設計一些情境及相關的討論問題，目的爲幫助學生釐清一些基本的概念，並提升他們的解難能力。姑且稱這個方式爲「個案研究」吧。筆者爲這些「個案」訂定了兩個條件：一、以常理爲基礎；二、情境不要太複雜，但要有變化。

這個做法要有成效，取決於課堂內能否營造良好的討論氣氛。筆者受教學技巧及客觀條件所限，效果遜於預期；然而，筆者深信這個做法對學生有幫助，所以在此與讀者們分享。

以下是兩個「個案」的描述。

鬧鐘叫人事件 —— 兩個比一個好？

（甲）情境設定

陳小姐明天清早有一個非常重要的約會，她爲了能準時起床，用兩個鬧鐘叫醒自己。

設　G = 行針鐘正常響鬧的事件　　G’ = 該行針鐘故障的事件
　　H = 跳字鐘正常響鬧的事件　　H’ = 該跳字鐘故障的事件

（乙）教學重點

(1) 就已定義的 G、G’、H 及 H’，探討它們之間那一些組合是互斥事件、互補事件或獨立事件。

(2) 分析兩個鐘都沒有響鬧、只有一個鐘響鬧和兩個鐘都響鬧三種結果，

並且由 P(G) 及 P(H) 的設定數值計算下列概率。(例如:設 P(G) = 0.9 及 P(H) = 0.95)

(i) P(兩個鐘都沒有響鬧)

(ii) P(只有一個鐘響鬧)

(iii) P(兩個鐘都響鬧)

(3) 計算 P(兩個鐘都沒有響鬧) + P(只有一個鐘響鬧) + P(兩個鐘都響鬧) 的和,並就結果加以討論。

(4) 計算使用兩個鬧鐘而有鐘響鬧的概率,從而比較陳小姐用兩個鬧鐘及只用一個鬧鐘的「安全度」。

抽獎事件 —— 殿後會吃虧嗎?(*)

(甲)情境設定

Amy、Betty 和 Cindy 參加遊戲節目。主持人手持 3 個信封,其中一個內有紅咭,另外兩個內有白咭;而只有抽中紅咭的一人中獎。

主持人請 Amy 先抽信封,然後是 Betty,最後才是 Cindy。

設 P(A) = Amy 中獎的概率　　P(A') = Amy 不中獎的概率
P(B) = Betty 中獎的概率　　P(B') = Betty 不中獎的概率
P(C) = Cindy 中獎的概率　　P(C') = Cindy 不中獎的概率

討論的重心自然是各人中獎的概率了。然而,各人面對的情境因應抽獎的次序而有所不同 —— 先抽有優勢嗎?殿後會吃虧嗎?要探討這些問題,便要訴諸概率了。

(乙)教學重點

(1) 分析各人抽獎時面對的情境:從多少個信封中抽取一個?信封的內容有多少種可能性?

(2) 通過全面地探討各人中獎或不中獎的概率

(i) 深化「互補事件」、「互斥事件」及「非獨立事件」的概念;

(ii) 加強理解「加法定律」和「乘法定律」;

(*) 本個案的靈感來自《明報》2004 年 11 月 24 日「生活學堂」欄,簡永源老師的文章「輪流抽籤遊戲　先玩有著數?」。

(3) 學習根據前設條件，分析實況，訂定解難策略。

（丙）輔助問題

先討論下列問題會有助學生理解：

$P(A) + P(A') = ?$　　$P(B) + P(B') = ?$

$P(C) + P(C') = ?$　　$P(A) + P(B) + P(C) = ?$

不難明白，A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 是三對互補事件，而 A、B 和 C 是一組互斥事件。

（丁）各人中獎的概率

(1) $P(A) = \dfrac{1}{3}$

(2) $P(B) = \dfrac{2}{3}^{(**)} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

(3) 方法一： $P(C) = \dfrac{2}{3}^{(**)} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

方法二： $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

經計算知道，在上述的情境中，先抽並沒有優勢，殿後亦不會吃虧。

值得注意的是，這種「公平」僅在信封數目爲參與人數的倍數時才成立；假如是 3 人參與而有 5 個信封，則 Amy 和 Betty 各有 $\dfrac{2}{5}$ 機會中獎，

(**) $\dfrac{2}{3}$ 為Amy落空的概率。在這個前提之下，Betty各有 $\dfrac{1}{2}$ 機會中獎或落空，而Betty落空即是Cindy中獎。

而 Cindy 只有 $\frac{1}{5}$。

（戊）各人不中獎的概率

(1) $P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$； $P(B') = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$；

$P(C') = 1 - P(C) = \frac{2}{3}$

(2) 計算 P(B') 的另一方法：
分析 Betty 不中獎的可能：是 Amy 已中獎或 Amy 落空而 Betty 自己亦落空（這亦相當於 Cindy 中獎），所以 $P(B') = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

(3) 計算 P(C') 的另一方法：
分析 Cindy 不中獎的可能：是 Amy 已中獎或 Betty 已中獎，所以 $P(C') = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

（己）進一步探討

(1) 引導學生討論「如果 Amy 中獎，則 Betty 和 Cindy 都會落空，可是爲什麼 $P(A) \neq P(B') + P(C')$？」，由此重溫加法定律應用於互斥事件的要義。亦可以將問題重組成「爲什麼 $P(A') + P(B') + P(C') \neq 1$？」，思考 A'、B' 和 C' 的關係與 A、B 和 C 的關係迴異之處。

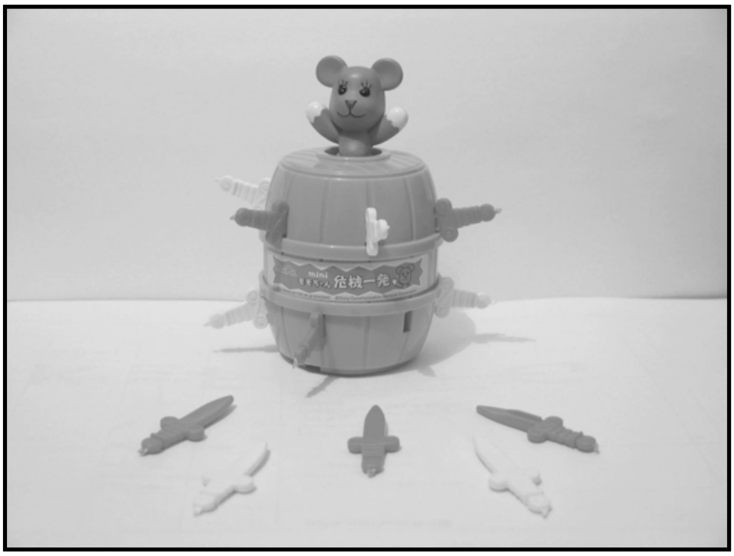
(2) 另一方面，「Amy 中獎」只是「Betty 不中獎」的部份原因，回顧上述（戊）(2) 和 (3)，我們可以說 $P(B') = P(A) + P(C)$，而 P(C') 亦明顯等於 $P(A) + P(B)$。

至於 P(A')，$P(A') = 1 - P(A) = 1 - [\, 1 - P(B) - P(C)\,] = P(B) + P(C)$。

有趣的是，Amy 作爲首位抽獎者，她中獎與否較難從其餘二人的情況推論，但是我們可以從數式得出 $P(A') = P(B) + P(C)$。

一個玩具

無獨有偶，筆者在家無意中找到女兒一個舊玩具，與第二個個案有異曲同工之妙！



這是一個二人或多人對玩純碰運氣的玩意，玩具的主體上有 12 個孔，其中只有一個孔在膠劍插入時才會令玩具小熊彈出。遊戲參與者輪流將膠劍插入孔裡，最快使玩具小熊彈出者為勝。

（甲）簡化情境

為了方便學生理解，可考慮簡化為只有 6 個孔和 6 支膠劍。

（乙）建議的進路

淡化遊戲者的角色，將思考的主線放在：是第幾支劍使玩具小熊彈出？

設 $P(N)$ = 第 N 枝膠劍使小熊彈出的概率，其中 $N = 1, 2, \ldots, 6$。

$$P(1) = \frac{1}{6} \qquad P(2) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{5}$$

$$P(3) = \frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4} \qquad P(4) = \frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$P(5) = \frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} \qquad P(6) = \frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$$

可引導學生討論同一個問題：先玩有有優勢嗎？三人對玩又如何呢？

作者電郵：estella.hui@gmail.com