關於一道美國數學奧林匹克題的研究

張　贇
西安交通大學附屬中學

第 33 屆（2004 年 4 月 28 日）美國數學奧林匹克試題的第 5 題是：

設a、b、c是正實數，證明：

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \ge (a + b + c)^3 \tag{1}$$

筆者對此題作了一些研究，發現了兩個較一般性的結論，茲介紹之。

命題 1　設a、b、c是正實數，m、$n \in \mathbf{N}^*$。若$n - m \ge 3$，則

$$(a^n - a^m + n - m)(b^n - b^m + n - m)(c^n - c^m + n - m) \ge (a + b + c)^3 \tag{2}$$

爲證 (2) 式，先給出下面引理：

引理　若 $a > 0$，$n \in \mathbf{N}$，$n > 1$，則 $\dfrac{a^{n+1}+n}{n+1} \ge \dfrac{a^n+n-1}{n}$ (3)

證明　$\dfrac{a^{n+1}+n}{n+1} \ge \dfrac{a^n+n-1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n\,a^{n+1} + n^2 \ge (n + 1)a^n + n^2 - 1$

$\Leftrightarrow \quad n\,a^{n+1} + 1 \ge (n + 1)a^n$。而$n\,a^{n+1} + 1 = \underbrace{a^{n+1} + a^{n+1} + \cdots\cdots + a^{n+1}}_{n\text{ 個}} + 1$

$\ge \quad (n + 1)\sqrt[n+1]{\underbrace{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdots\cdots a^{n+1}}_{n\text{ 個}}} = (n + 1)a^n$，$\therefore$ 引理獲證。

我們再來證明 (2) 式。

證明　$\because \underbrace{a^n + a^n + \cdots\cdots + a^n}_{m\text{ 個}} + \underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots + 1}_{n-m\text{ 個}} \ge n\sqrt[n]{(a^n)^m} = n\,a^m$

$\therefore \quad \dfrac{m}{n}a^n + \dfrac{n-m}{n} \ge a^m$

$\therefore \quad \dfrac{m}{n}a^n - a^m + \dfrac{n-m}{n} \ge 0$

$\therefore \quad a^n - a^m + n - m = \left(\dfrac{m}{n}a^n - a^m + \dfrac{n-m}{n}\right) + \dfrac{n-m}{n}(a^n + n - 1)$

$$\geq \frac{n-m}{n}(a^n+n-1)$$

同理，$b^n - b^m + n - m \geq \dfrac{n-m}{n}(b^n + n - 1)$，$c^n - c^m + n - m$

$\geq \dfrac{n-m}{n}(c^n + n - 1)$。

$\therefore \quad (a^n - a^m + n - m)(b^n - b^m + n - m)(c^n - c^m + n - m)$

$\geq \quad (\dfrac{n-m}{n})^3 (a^n + n - 1)(b^n + n - 1)(c^n + n - 1)$

於是，要證 (2) 式，只要證 $(\dfrac{n-m}{n})^3 (a^n + n - 1)(b^n + n - 1)(c^n + n - 1)$

$\geq \quad (a + b + c)^3$。亦即 $\dfrac{a^n+n-1}{n}\cdot\dfrac{b^n+n-1}{n}\cdot\dfrac{c^n+n-1}{n} \geq (\dfrac{a+b+c}{n-m})^3$ 。

由引理知 $\dfrac{a^n+n-1}{n}\cdot\dfrac{b^n+n-1}{n}\cdot\dfrac{c^n+n-1}{n}$

$\geq \quad \dfrac{a^{n-1}+n-2}{n-1}\cdot\dfrac{b^{n-1}+n-2}{n-1}\cdot\dfrac{c^{n-1}+n-2}{n-1} \quad \geq \quad \ldots\ldots$

$\geq \quad \dfrac{a^{n-m}+n-m-1}{n-m}\cdot\dfrac{b^{n-m}+n-m-1}{n-m}\cdot\dfrac{c^{n-m}+n-m-1}{n-m}$ ，$\therefore$ 只要證明

$$\frac{a^{n-m}+n-m-1}{n-m}\cdot\frac{b^{n-m}+n-m-1}{n-m}\cdot\frac{c^{n-m}+n-m-1}{n-m} \geq (\frac{a+b+c}{n-m})^3 \qquad (4)$$

當$n - m = 3$時，(4) 式便是賽題 (1) 式的加強形式，即

$(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq (a + b + c)^3$，而 $\dfrac{a}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$

$\leq \quad \sqrt[3]{\dfrac{a^3}{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}} \quad \leq \quad \dfrac{1}{3}(\dfrac{a^3}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2})$

同理，$\dfrac{b}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}} \quad \leq \quad \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{b^3}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2})$ ，

$\dfrac{c}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}} \quad \leq \quad \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{c^3}{c^3+2})$ 。

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}} + \dfrac{b}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}} + \dfrac{c}{\sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)}}$

$\leq \quad 1$，

$\therefore \quad \sqrt[3]{(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)} \geq a+b+c$

$\therefore \quad (a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geq (a+b+c)^3$

說明 $n-m=3$ 時，(4) 式成立。

當 $n-m \geq 4$ 時，由引理得

$$\frac{a^{n-m}+n-m-1}{n-m}\cdot\frac{b^{n-m}+n-m-1}{n-m}\cdot\frac{c^{n-m}+n-m-1}{n-m}$$

$\geq \quad \dfrac{a^3+2}{3}\cdot\dfrac{b^3+2}{3}\cdot\dfrac{c^3+2}{3}$，而 $\dfrac{a^3+2}{3}\cdot\dfrac{b^3+2}{3}\cdot\dfrac{c^3+2}{3} \geq (\dfrac{a+b+c}{3})^3 >$ $(\dfrac{a+b+c}{4})^3 > (\dfrac{a+b+c}{5})^3 > \ldots\ldots$。

$\therefore \quad n-m \geq 4$ 時，(4) 式也成立。故命題 1 獲證。

命題 2　設 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ 是正實數，n、$m \in \mathbf{N}^*$。若 $n-m \geq 3$，
則 $(a_1^n - a_1^m + n - m)(a_2^n - a_2^m + n - m) \ldots\ldots (a_{n-m}^n - a_{n-m}^m + n - m)$

$$\geq \quad (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-m})^{n-m} \tag{5}$$

命題 2 的證明可仿照命題 1 的證明完成，故不贅述。

聯絡地址：西安交通大學附屬中學（郵政編碼：710048）