EduMath 21 (12/2005)

# 耐人尋味的圖案 —— 五角星

任景業
山東省茌平縣實驗中學

有一個傳說，畢達哥拉斯學派的一個門徒，在遊學的路上得了重病，奄奄一息，眼看性命難保。好在一個好心人將他救到家中，餵湯餵藥，精心照料。數天後，門徒身體痊愈，康健如初，打點行裝，要告別恩人上路了，門徒想給恩人一點答謝，摸摸身上實在拿不出有價值的禮物。噢！有了，學派剛剛發現了一個奇特的圖形，就用這個圖形做作爲答謝的禮物吧。於是，他畫了一個五角星，對恩人說：「您把這個圖形掛在門上，他會給您帶來幸福和吉祥。」

那時的五角星還鮮爲人知，門徒以五角星相贈，可見其彌足珍貴。

五角星給這家好心人帶來了怎樣的幸福和吉祥，我們不得而知，在上古，人們崇拜五角星，賦予五角星種種神秘的色彩，把它用作祈求幸福的魔法符號卻是事實。

圖 1：五角星，又稱五芒星

圖 2：大天使米達倫（Metatron）的封印上繪製的五角星

圖 2 是大天使米達倫（Metatron）的封印上繪製的五角星[1]。

由於五角星可以一筆畫出，因此古人認爲用它可以防止惡魔的侵犯。其線條的五個交匯點被認爲是可以封閉惡魔的「門」。於是，五芒星便用在了天使的封印上。

歷史長河奔流不息，沖刷去人類多少記憶，耐人尋味的是人們對五角星的崇拜依舊。世界上許多國家的國旗上有五角星。在某網站上我找到了《世界各國國旗觀賞》，數了數，好傢伙，在 199 個國家的國旗中，帶有五角星圖案的竟然有 54 個！[2]

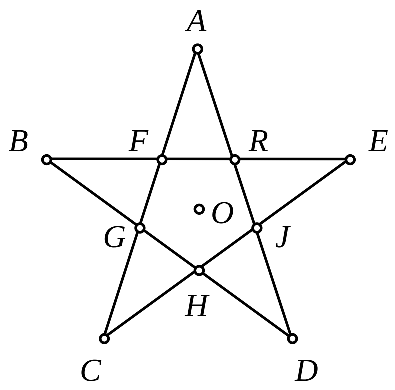



圖 3：五角星，耐人尋味的圖案

一個普通的幾何圖案，爲什麼受到如此高的禮遇？

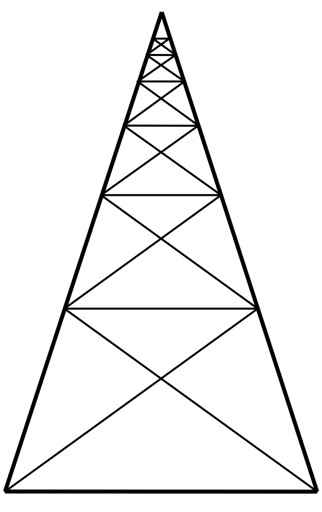
我們不妨從數學的角度作一探討。

(1) 軸對稱性。它是一個軸對稱圖形。有五條對稱軸。

(2) 旋轉不變性。繞中心 $O$ 旋轉 72°，所得的圖形與原圖形重合。

(3) 黃金分割點。構成五角星的五條線段兩兩相交得到的五個點，恰是原五條線段的黃金分割點，均衡分佈的諸多黃金分割點，使其圖形勻稱、和諧、美觀。

(4) 五角星的每一個角都是黃金三角形。如果一個等腰三角形的底角爲 72°、頂角爲 36°，這樣的三角形叫黃金三角形。作出兩個底角的平分線，會得到兩個新的黃金三角形。如果按此程式繼續作下去，會得到無數黃金三角形。由此，我們可以得到許許多多的五角星。


(1)

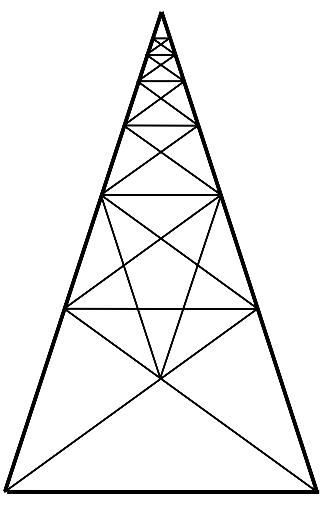

(2)

圖 4：黃金三角形

當然，在圖 3 中，連結 *CD*，得到的三角形 *ACD*，三角形 *GCD* 也是黃金三角形。

(5) 如圖 5，*CG* 的延長線與 *AN* 的交點 *E*，*DF* 的延長線與 *AM* 的交點 *B*，以及點 *A*、點 *C*、點 *D* 又構成一個正五角星。

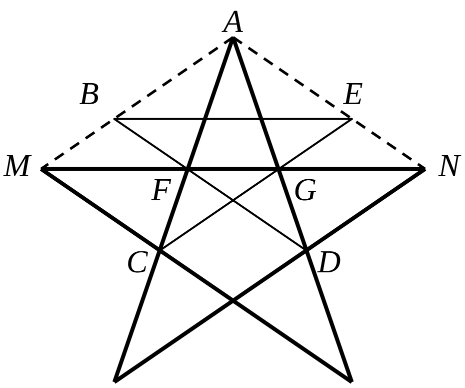



圖 5：自生的五角星

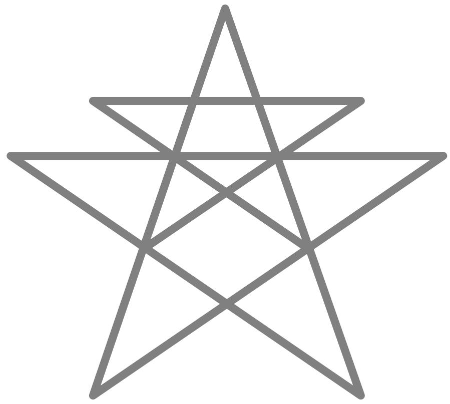


圖 6：巴西 FURNAS 電力公司標誌

圖 6 是巴西FURNAS電力公司的標誌。有趣的是，作者用一大一小兩顆星巧妙地重疊組合，自然地把高壓輸電塔與五角星 —— 這一光明的象徵 —— 聯繫在一起，很好地表達了主題，形象逼真，簡潔明瞭，不用言傳，即可會意。[3]

千百年來，全世界的男男女女，老老少少，平民百姓，達官賢貴，對它的興趣不減。

圖 7 是從三星堆出土的太陽輪，距今已有三千多年。太陽輪是標誌太陽的多輻輪，對太陽的崇拜幾乎是全世界的人所共有的，在印度半島古代的太陽輪常常是六輻，在以色列是八輻或六輻。但是在三星堆出土的太陽輪卻都是五輻 [4]。吳官正在三星堆見到太陽輪後不禁發出這樣的感慨：「四分法容易，五分法是很難的啊！」在三星堆，這個重要的太陽崇拜標誌竟然都變成了五輻太陽輪！由此，更引來很多人的猜想：「5」在三星堆人那裏是不是還有神聖的出處？這個數目字是不是還有其他我們未知的涵義？

圖 7：
三星堆出土的太陽輪

19 世紀末，英國數學遊戲大師杜登尼寫了一本書，名叫《520 個趣味數學難題》，其中有這樣一道題：「16 棵樹栽成 15 行，每行栽 4 棵，問如何栽？」乍看此題似乎無解，其實不然，圖 8 給出了一個美麗的解答。

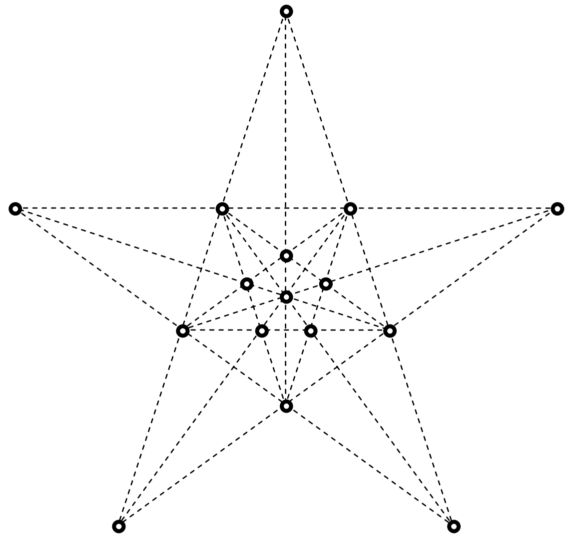


圖 8：
英國數學遊戲大師杜登尼的栽樹法

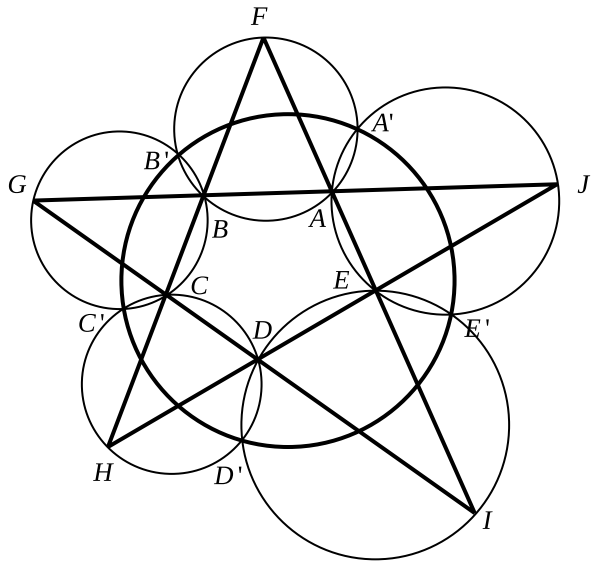



圖 9：五點共圓

如果你隨手畫一個五角星（不一定是正五角星），再作出這個五角星的五個角上的三角形的外接圓，這五個圓除了在五角星上的那五個交點外，在五角星外面還有另外五個交點。有趣的是，不管五角星是什麼樣的，後五個交點一定在同一個圓上。如圖 9，五角星的五個角的外接圓的交點 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 五點共圓。

這是中國科學院張景中院士的最新著作中的「五圓定理」，它引起了江澤民總書記的濃厚興趣。2000 年 12 月 20 日是澳門回歸一周年紀念日，江澤民主席參加澳門慶典時，把這道幾何題留給了濠江中學的師生。

如果是正五角星，也還算罷了，而偏偏你這五角星可以是任意的。一時間，引起社會各界人士的濃厚興趣。加入到這道幾何題的求解行列之中的，有正在刻苦攻讀的中學生，也有風華正茂的中青年教師，還有離退休老工人、老幹部、老專家等。其中年齡最大的 69 歲，最小的只有 13 歲。[5]

下面是一種證法提示，要用到四點共圓的判定，四點共圓判定其實也不難理解，我們知道，圓內接四邊形的對角互補。反過來，我們可以得到：對角互補的四邊形內接於圓。這是一個真命題，可以用來判定四點共圓。

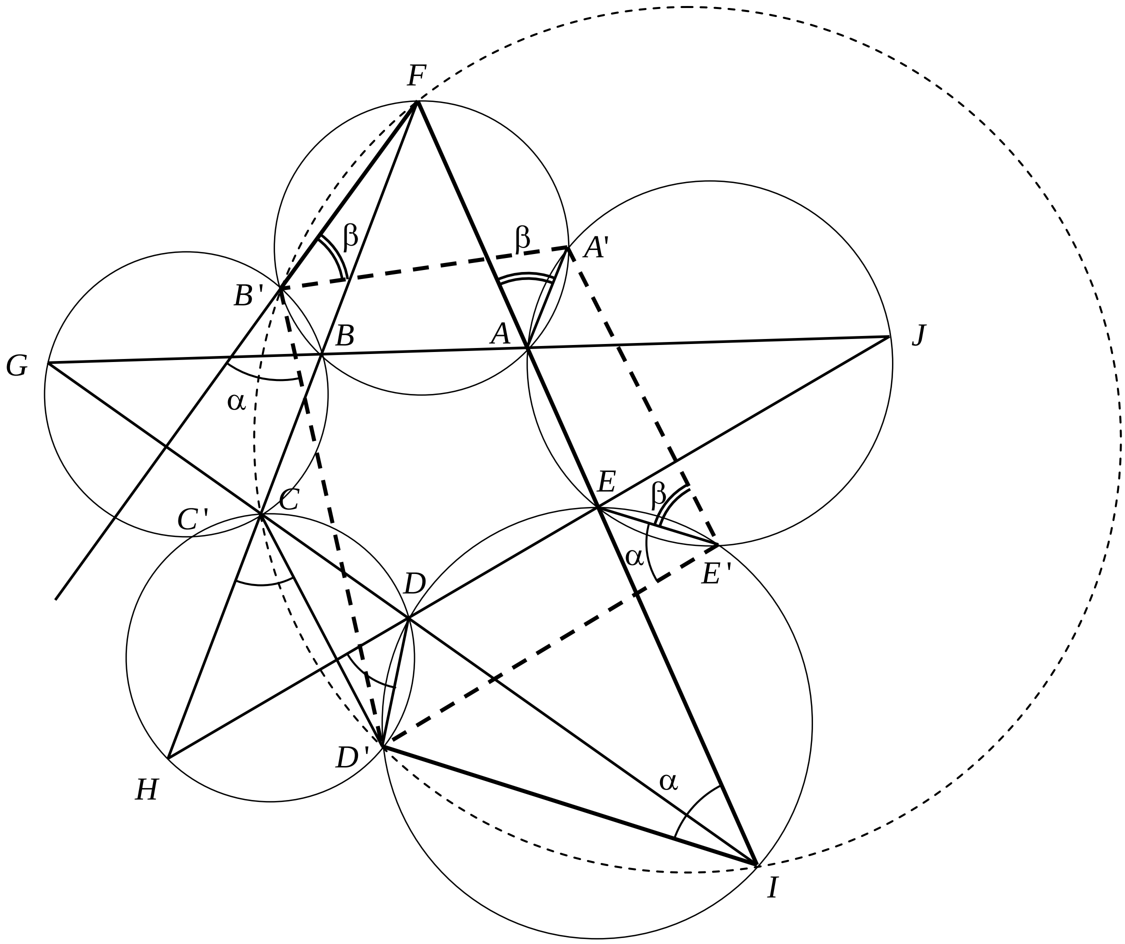



圖 10：五點共圓的證明

圖中相等的角分別用 α、β 表示，$\angle A'E'D' = \alpha + \beta$，$\angle A'B'D' = 180° - (\alpha + \beta)$ (*)。所以，$\angle A'E'D' + \angle A'B'D' = 180°$。所以，$A'$、$B'$、$D'$、$E'$ 四點共圓。同理，可以得到$A'$、$B'$、$C'$、$D'$ 四點共圓。由此得，$A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 五點共圓。

對五角星不僅人類如此厚愛，許多病毒也偏愛五角星（五邊形），2000 年 9 月 25 日中國家庭網訊：美國和瑞典科學家發現一種噬菌體 HK97 病毒的頭由 72 個蛋白環構成，其中 12 個呈五邊形，60 個呈六邊形。

有生命的偏愛五邊形，沒生命的也來湊熱鬧。碳的基本形態，除了金剛石和石墨外，還有另一種形態$C_{60}$，它是由 60 個碳原子構成的分子，是形如足球的多面體。這個多面體有 60 個頂點，以每個頂點爲一端都有 3 條

(*) 編者按： 易證$F$、$C$、$D'$、$I$四點共圓及$F$、$B'$、$C$、$I$亦四點共圓。由此得$F$、$B'$、$D'$、$I$四點共圓。

棱，面的形狀只有五邊形和六邊形，如圖 11。

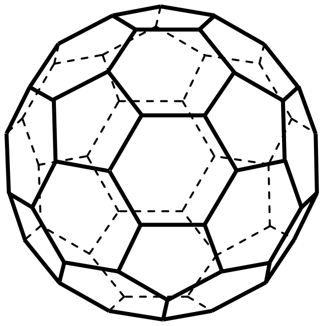


圖 11：$C_{60}$結構模型

這一重大發現，使克羅托、柯爾和斯莫利三位科學家獲得了 1996 年的諾貝爾化學獎。1997 年的全國高考化學試題第 36 題即以此爲背景：

> 1996 年諾貝化學獎授予對發現$C_{60}$有重大貢獻的三位科學家。$C_{60}$分子是形如球狀的多面體，該結構的建立基於以下考慮：
>
> (1) $C_{60}$分子中每個碳原子只跟相鄰的 3 個碳原子形成化學鍵；
> (2) $C_{60}$分子只含有五邊形和六邊形；
> (3) 多面體的頂點數（$V$）、棱邊數（$E$）和面數（$F$）的關係，遵循歐拉定理：$V - E + F = 2$。
>
> 據上所述，可推知$C_{60}$分子有 12 個五邊形和 20 個六邊形。請回答以下問題：
>
> $C_{70}$分子也已製得，它的分子結構模型可以與$C_{60}$同樣考慮而推知。通過計算確定$C_{70}$分子中五邊形和六邊形的數目。$C_{70}$分子中所含五邊形數為____________，六邊形數為__________。

這題可用初中的知識來解決：

解　設$C_{70}$分子中五邊形數爲$x$，六邊形數爲$y$。依題意可得方程組：

$$\tfrac{1}{2}(5x + 6y) = \tfrac{1}{2}(3 \times 70) \quad 及 \quad 70 - \tfrac{1}{2}(3 \times 70) + (x + y) = 2$$

解得，五邊形數 $x = 12$，六邊形數 $y = 25$。

我們通常切蘋果，多是採用縱向的剖開方式，看到的果心是蝴蝶狀紋路，有個孩子偏偏異想天開，橫向一切，果心處卻是五角星的形狀。自然界也是如此的偏愛五角星！

從古至今，人們探索宇宙的好奇心是如此的強烈，一代一代人爲此傾注畢生心血，雖然無法使這種好奇心得到滿足，探尋其奧秘的腳步卻從沒有停止過，不但沒有停止，人們的熱情反而愈來愈烈。最近有人又提出宇宙模型與五邊形有關：

據 2003 年 10 月 9 日英國《自然》雜誌網路版介紹，美國紐約數學家傑弗裏・維克斯領導的研究小組提出：宇宙是有限的，外表是由 12 個五邊形曲面構成龐加萊 12 面體，像個足球。圖 12 [6]。「宇宙到底是什麼樣的？」這一問題已經爭論了幾千年，至今沒有定論。人們曾經提出過龜宇宙模型、托勒密體系、黑洞理論、暴脹宇宙、弦理論 …… 等等，圖 13 [7]。如今又有了與五邊形有關的足球宇宙模型。看來「宇宙到底是什麼樣的？」的問題一時半時是解決不了的。

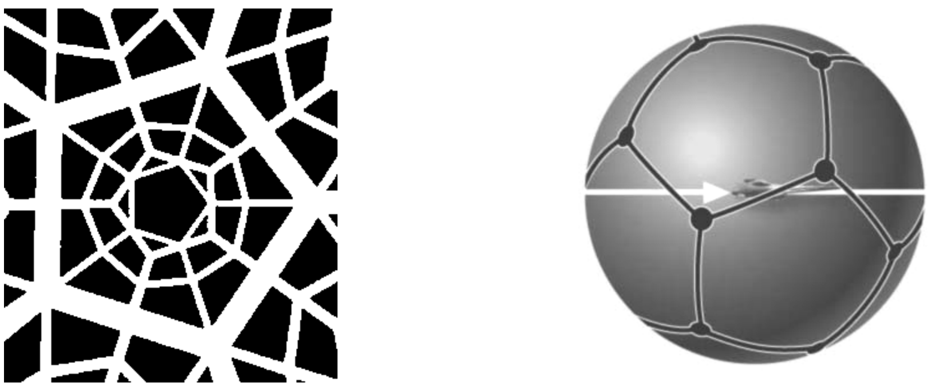
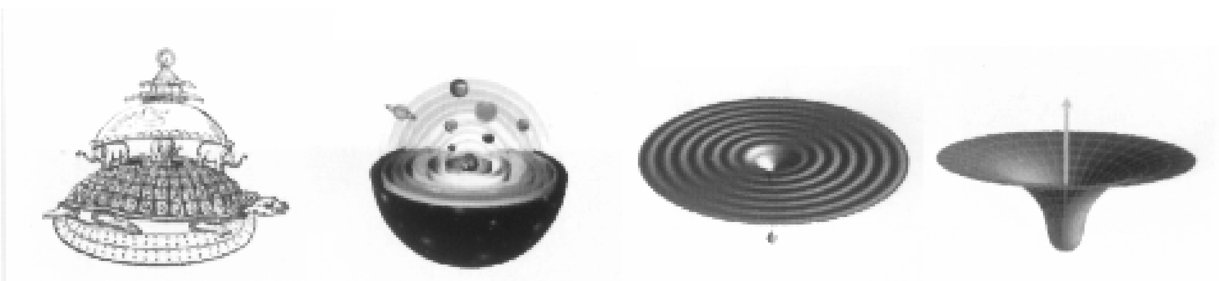


圖 12：威克斯提出的宇宙模型



龜宇宙　　托勒密體系　　黑洞理論　　暴脹宇宙

圖 13：人們提出過各種各樣的宇宙模型

五角星的知識大家已瞭解了許多，大家想不想自己也做一個五角星，閒暇時慢慢尋味它的無窮奧秘呢？

畫一個圓，把圓心角（圓）五等分，連接各分點即可得到正五邊形。如圖 14。

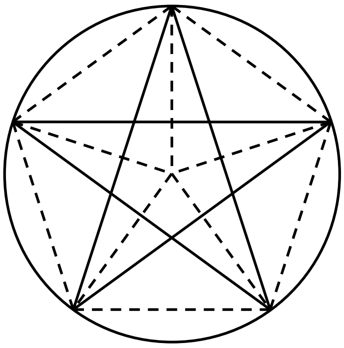


圖 14

如果你手旁有兩邊平行的紙帶，按圖 15 也可以折一個五角星：

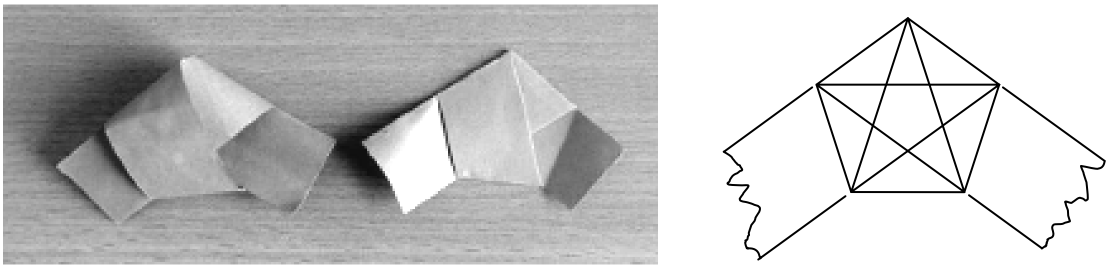


圖 15

五角星有如此多的文化內涵，自然也會吸引中考命題專家的青睞，下面幾道中考題都直接或間接地與五角星有關，搜集於此，留給大家慢慢玩味：

1. （南京市中考試題）如圖 16，圓內接正五邊形 $ABCDE$ 中，對角線 $AC$ 和 $BD$ 相交於點 $P$，則 $\angle APB$ 的度數是多少？

   A. $36°$　　B. $60°$　　C. $72°$　　D. $108°$

2. （2003 年哈爾濱中考試題）如圖 17，在 $\Delta ABC$ 中，$AB = AC$，點 $D$ 在 $AC$ 邊上，且 $BD = BC = AD$，則 $\angle A$ 的度數爲多少？

   A. $30°$　　B. $36°$　　C. $45°$　　D. $70°$

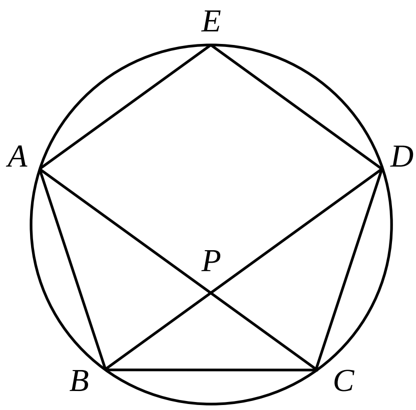



圖 16

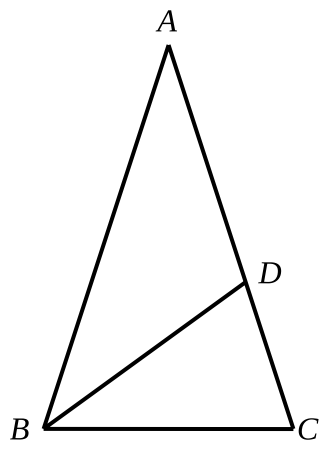



圖 17

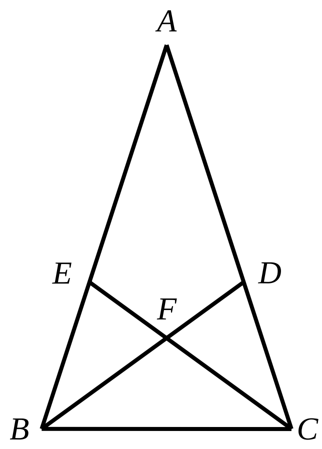



圖 18

3. （2003 年天津中考試題）如圖 18，在 $\Delta ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$，$BD$、$CE$ 分別為 $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線，且相交於點 $F$，則圖中的等腰三角形有多少個？

A. 6 個　　B. 7 個　　C. 8 個　　D. 9 個

4. （2003 年黔東南州考試題）如圖 19，我國國旗上的五角星的每一個頂角（$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$）都相等，其度數是多少？

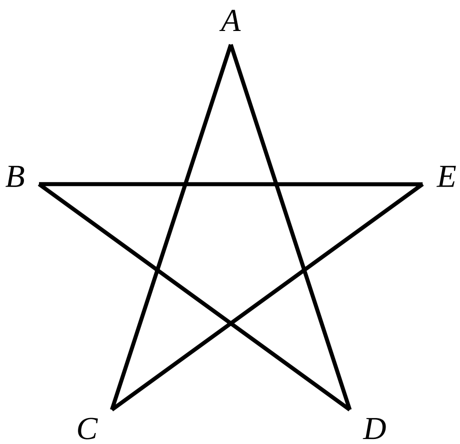



圖 19

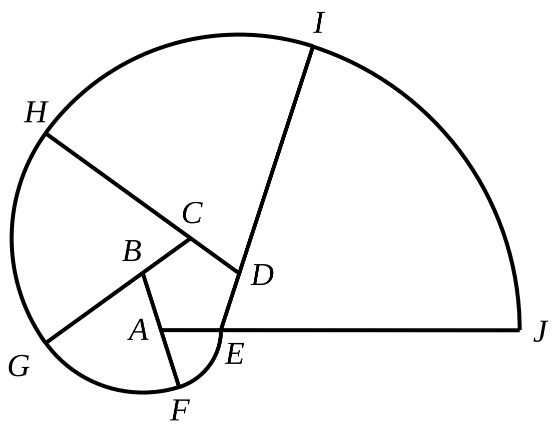



圖 20

5. （2003 年貴陽中考試題）如圖 20，五邊形 $ABCDE$ 是正五邊形，曲線 $EFGHIJ$ 叫做「正五邊形 $ABCDE$ 的漸開線」，其中 $\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FG}$、$\overset{\frown}{GH}$、$\overset{\frown}{HI}$、$\overset{\frown}{IJ}$ 的圓心依次按 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 迴圈，它們依次相連接。如果 $AB = 1$，那麼曲線 $EFGHIJ$ 的長度為多少（結果保留以 $\pi$ 表示）？

6. （2003 年安徽省中考試題）圖 21 是五角星，已知 $AC = a$，求五角星外接圓的直徑（結果用含三角函數的式子表示）。

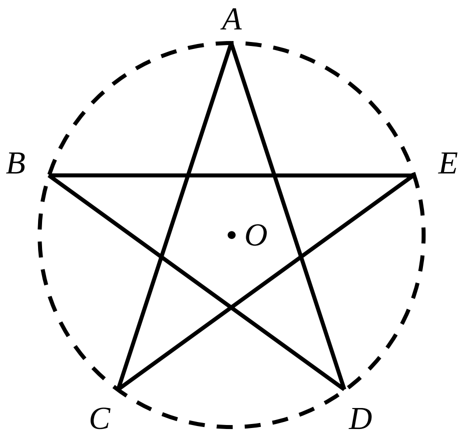



圖 21

## 參考答案

1. C　2. B　3. C　4. 36°　5. 6π

6. 連結 $AO$，並延長交⊙$O$ 於 $F$，連結 $CF$，則 $\angle ACF = 90°$。
$\because$ $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 是⊙$O$ 的五等分點，
$\therefore$ $\angle CAD = \frac{1}{5} \times 180° = 36°$，$\angle CAF = \frac{1}{2} \times \angle CAD = 18°$
在直角 $\Delta ACF$ 中，$AC = a$，
$$\therefore \quad AF = \frac{AC}{\cos\angle CAF} = \frac{a}{\cos 18°}$$

## 主要參考資料

[1] http://www.globetown.net/~tblnwieio_vill/Library/Satanology/006.htm
[2] http://88gg.com/001/gp/00gp.htm
[3] 王汀、張力平（2001）。《成功 logo 暢想》。廣東人民出版社。
[4] http://www.bashu.net/travel/deyang/museum_sanxingdui.htm
[5] http://www.pyedu.myetang.com/edu_club/math/py/py4-6.htm
[6] http://www.dayoo.com/content/2003-10/10/content_1247381.htm
[7] 史蒂芬・霍金（2002）。《時間簡史》。湖南科學技術出版社。

聯絡地址：山東省茌平縣實驗中學（郵政編碼：252100）