有關平面鑲嵌的開放性問題

傅海倫
山東師範大學數學科學學院

開放性問題是相對於封閉性問題而言的。數學中的「封閉性問題」一般指問題的條件和結論都完全確定，而且不多不少。而所謂「開放性問題」是指：就問題本身而言，或者條件是不完全確定的，或者結論是不唯一的，甚至沒有標準答案。問題內容的獨特性、表述形式的新穎性、問題解決的發散性和教育功能的創新性是數學開放題最突出的特徵。開放性問題是考查學生創新意識，有利於學生自主發揮水平的好題型，下面以平面鑲嵌問題爲例說明之。

在日常生活中，觀察各種建築物的地板，就能發現地板常用各種正多邊形地磚鋪砌美麗的圖案。也就是說，使用給定的某些正多邊形，能夠拼成一個平面圖形，既不留下一絲空白，又不互相重疊，這在幾何裏叫做平面鑲嵌。平面鑲嵌與正多邊形的內角大小有關。當圍繞一點拼在一起的幾個多邊形的內角加在一起恰好組成一個周角（360°）時，就拼成了一個平面圖形。

平面鑲嵌問題具有很強的開放性，這類試題，有利於考查學生的探索能力，發散思維和創造意識，對於今後的教學有很好的導向性。教師在教學中應該充分重視發揮這個開放應用題的教育價值。爲此可以設置如下的問題：

(1) 請你舉出常見的兩種正多邊形鑲嵌成一個平面圖形的例子。

(2) 像上面那樣鋪地面，能否全用正五邊形的地磚？爲什麼？

(3) 如果限於用一種正多邊形鑲嵌，試討論哪幾種正多邊形能鑲嵌成一個平面圖形？

(4) 請你再畫一個用兩種不同的正多邊形地磚鋪地的草圖。

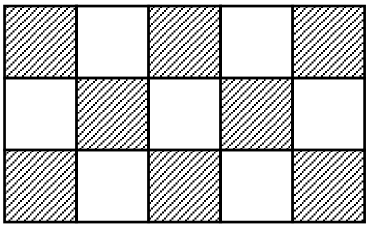
(5) 從正三角形、正方形、正六邊形中選取一種，再從其他正多邊形中選

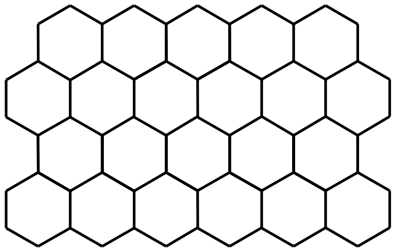
取一種，探索這兩種正多邊形共能鑲嵌成幾種不同的平面圖形？說明你的理由。

(6) 你能不能另外想出一個用一種多邊形（不一定是正多邊形）的地磚鋪地的方案？把你想到的方案畫成草圖。

分析與參考解答

(1) 我們常見到如圖那樣圖案的地面，它們分別是全用正方形或全用正六邊形地磚鋪成的，這樣形狀的地板能鋪成平整、無空隙的地面。





(2) 所用地磚的形狀不能是正五邊形。因爲正五邊形的每個內角都是 108°，而找不到符合條件 $n \times 108° = 360°$ 的 n，故不能用正五邊形的地磚鋪地面。

(3) 設每塊所用的正多邊形地磚有 n 條邊，圍繞某一點需要 m 塊這樣正多邊形地磚才能鑲嵌成一個平面圖形。則 $\dfrac{m(n-2)180°}{n} = 360°$，

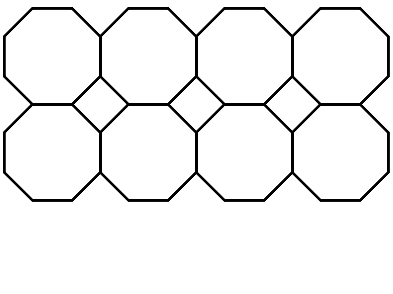
即 $(m-2)(n-2) = 4$（$m, n > 2$，m、n 是自然數）。

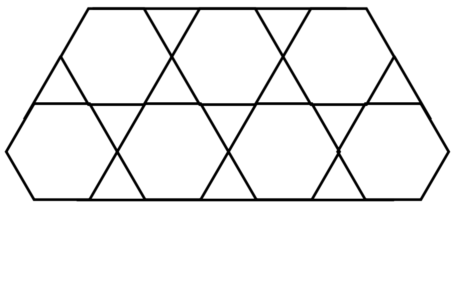
當 $m = 3$ 時，$n = 6$；當 $m > 3$ 時，$n < 6$。因此，$n = 3, 4, 5$。

當 $n = 3$ 時，$m = 6$；當 $n = 4$ 時，$m = 6$；當 $n = 5$ 時，m 不是整數。

綜上所述，$m = 3$，$n = 6$；$m = 4$，$n = 4$；$m = 6$，$n = 3$。即只有正三角形、正方形、正六邊形能鑲嵌成一個平面圖形。

(4) 符合要求的方案也很多，如下兩例：





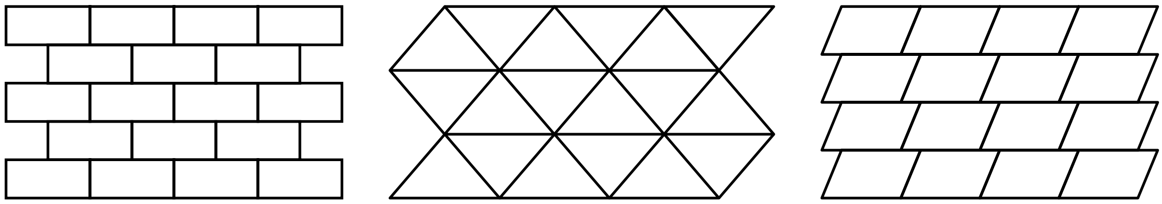
(5) 例如可以選取正方形和正八邊形。設在平面圖形的一個頂點周圍有 m 個正方形的角，n 個正八邊形的角，那麼，m、n 應是方程

$$m\,90^\circ + n\,135^\circ = 360^\circ \qquad (*)$$

的整數解。

化簡 (*) 式得 $2m + 3n = 8$，這個方程的整數解只有 $m = 1$、$n = 2$ 一組，所以符合條件的圖形只有一種。

(6) 符合要求的方案很多，如下幾例：



解決平面鑲嵌問題思維策略和解題方法不唯一，要求學生根據所設條件和要求，尋求切合實際的多種解決問題的途徑，變單向思維為多向思維。教師在平時的教學中應滲透開放題，要循序漸進，要根據學生的身心特點，符合學生的認知規律，由封閉一步一步走向開放，在引入開放題的基礎上逐漸進行開放式的教學。

聯絡地址：山東師範大學數學科學學院，（郵政編碼：250014）