

高一學生數學學習困難的認知要素探析

彭上觀

華南師範大學教務處

林 輝

廣東佛山市南海中學

高一，是學生從初中到高中轉變的一個關鍵期。在這期間，由於數學學科的特殊性，以及部分學生由於數學學習的方法、習慣、認知結構等方面的原因，在數學學習中，出現了不少困難。如何幫助數學學習困難的學生（下稱「數困生」）在轉型期度過難關，是值得關注的問題。本文結合筆者的教學實踐，在與學生的訪談、以及多次測試、調查的基礎上，從學生認知的角度，分析高一學生數學學習困難的成因，以期對數學學習困難的轉化策略的選擇提供一定的借鑒。

1. 高一數學學習困難成因的認知要素分析

高一學生數學學習困難的成因是多方面的，從學生認知的角度來看，主要有以下幾個方面：

1.1 對數學問題理解膚淺、機械記憶

對「數困生」而言，一方面，他們面對數學問題不能深入領會其含義，而只能反復閱讀文字符號進行記憶，這導致記憶不牢固，同時，也不能綜合運用所學的數學知識；另一方面，他們感知材料時，孤立地看待各個數學元素，每個數學元素只是停留在具體的數字信息（如數據等）的知覺上，難從具體內容中擺脫或抽象出來，因而沒有從真正意義上把握數學的概括性知識。例如，對函數概念的理解，「數困生」停留在初中的一次、二次函數或者正、反比例函數的水平上，不能從具體的函數中抽象出函數的概念，如對符號「 $y = f(x)$ 」的理解局限於具體的 x, y ，因而在解決諸如「若函數 $f(x)$ 的定義域為 $[2, 3]$ ，求函數 $f(2x - 1)$ 的定義域」等問題時，就會將中 $f(x)$ 的 x 與 $f(2x - 1)$ 中的 x 混為一談。在一次測試中，有 36.2% 的學生把這兩個函數中的 x 看作同一個變數，得到錯誤答案「 $[3, 5]$ 」。

1.2 數學知識儲備不足

現代教育心理學家奧蘇貝爾 (David P. Ausubel) 認為「學習者認知結構中具備適當的觀念」是有意義學習的條件之一 [2]。而學生的認知水平與相關的知識儲備量是密切相關的。對「數困生」來說，由於數學知識儲備不足，從數學學習的角度看，數學認知結構缺少與新知識相關的知識，影響了其後有關知識學習上的記憶能力、理解能力和思維能力，導致機械學習；反過來，機械學習又使得其學習的東西不夠牢固；從數學教學的角度看，由於學生缺乏相應的知識儲備，數學教學的效果「事倍功半」。例如：在高一數學學習中，解一元二次不等式是一個基本的內容，但「數困生」連一元二次方程的根都不會求（缺乏常見的代數變形、因式分解方法，記錯求根公式等），因而在相應的問題解決中會遇到不少麻煩。又如：解不等式「 $\frac{1}{x} < 1$ 」。在調查中發現，有 43.3% 的學生解得「 $x > 1$ 」，這是由於對不等式的性質理解不到位，誤認為「不等式兩邊同乘以一個數還是成立的」造成的。

1.3 數學知識的組織程度低，缺少靈活的產生式

頭腦中存在的知識並不意味著它得到有效的應用。事實上，足夠的知識儲備僅僅是問題解決的必要條件。「數困生」有時能記住或回憶起某個內容，但不能將之應用到有關的問題解決中，這說明他們的數學知識是零散的，數學知識之間沒有建立起本質的聯繫，或建立的聯繫不夠完善。可以想像：如果一座圖書館裏面的書不經過編碼、條理化，我們要找一本書是何等的困難！

另一方面，由於數學知識組織零亂，「數困生」頭腦中缺乏與具體知識相對應的穩定的產生式（所謂產生式是指學習者在學習過程中，頭腦裏逐步積累了一系列以「如果 … 那麼 …」的形式表示的規則）。現代數學教育心理學認為：要順利解決複雜的數學問題，問題解決者的認知結構中還應具備逆向產生式（以「要 … 就要 …」的形式表示的規則）和變形產生式（即正向、逆向產生式的綜合運用），而「數困生」在這方面顯得嚴重不足。例如：指數、對數的運算性質「 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ， $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 」，絕大部分學生都能理解，但在解決相關問題時卻不會用。在一次調查中，「化簡 $\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50 + 2^{1+\log_2 3}$ 」竟然有 83.3% 的學生不能算得正確結果，這說明記住公式不等於會運用。

1.4 數學知識表徵不完善

表徵是現代認知心理學的概念，它指的是知識或資訊以怎麼樣的形式儲存於大腦中。美國認知心理學家西蒙（H.A. Simon）認為：「表徵是問題解決的一個中心環節。它說明問題在頭腦裏是如何呈現，如何表現出來。」

[3]「數困生」頭腦中的數學知識往往是堆積的、羅列的，缺乏組織程度高的知識結構，因而難以完善地將問題表徵出來，從而成爲其解決數學問題的一大障礙。一般說來，表徵問題有內部表徵與外部表徵兩種形式。內部表徵，是指在頭腦中考慮問題，它依賴於問題解決者的知識和經驗，也受注意、感知、記憶等心理過程的制約；而外部表徵，即把問題用圖形、表格、模型等外部形式表示出來。根據筆者長期與學生訪談的結果表明，「數困生」之所以在問題解決中遇到或這或那的困難，在很大程度上是由於他們不會將相關問題表徵出來。例如，在一次測試中，對問題「已知甲： $3^{-|x|} - \frac{1}{3} > 0$ ，乙： $0.1^{\log x^2} > 1$ ，則甲是乙的甚麼條件？A、充分不必要，B、必要不充分，C、充分且必要，D、既不充分也不必要」，結果如下：選B、C、D所佔的比例分別爲 20.7%、31.0%、22.4%，而回答正確的只佔 25.9%。究其原因，最主要是沒理解好指數、對數的含義，不會將它們表徵成同底的指、對數式，或者對 1、0 的變換（如： $1 = 0.1^0$ ， $0 = \log 1$ ）無所適從。

1.5 反思監控能力弱

「數困生」在數學學習、問題解決中，往往不明白自己問題出在哪裡，不清楚如何改進自己的數學學習，因而即使學習很努力，學習效果卻不理想。這是由於缺乏對數學學習的有效反思、監控引起的。「就題論題，缺少對題目深入的研究」，是高一學生數學學習困難的常見毛病之一。針對這個問題，筆者在教學實踐中，對學生的作業實行「三步要求」的作法，即第一步，先寫解題的思路，以及有哪些可能解決的途徑；第二步，選擇自己擅長的一種解法詳細書寫出來；第三步，解題後的歸納總結：包括解該題（該類型題）用到什麼方法？條件、結論變化一下又會如何？有沒有其他的發現？體會？感想？一些疑難問題，等等。

調查表明，83.5% 的學生在剛開始時不習慣「三步要求」的做法，因爲初中以前都只需要做第二步（即寫出詳細解答）就行了。從最近幾次測試的情況來看，能自覺對自己的數學學習做出反思的學生，其學習效果均

比較理想。部分數學學習困難的學生，逐步嘗到了在解題前、後對自己的想法進行反思的甜頭。但是，也有近 15% 的學生不但沒有按照三步要求來做，而且解題過程太簡略，或者表達顛三倒四，邏輯混亂。如，「已知 a^2, b^2, c^2 成等差數列（公差不為 0），求證： $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ 也成等差數列」（人民教育出版社 2003 年版·高一教材 136 頁複習參考題 7）。本來應該由 $2b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow 2\frac{1}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$ ，但是，有 33.4% 的學生表達時卻寫成了 $2\frac{1}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \Rightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$ ，將條件與結論的充分性、必要性弄反了。

2. 轉化數學學習困難的幾點做法

基於以上的認識，筆者在教學中採取了如下一些措施，對轉化學生的數學學習困難收到了一定的效果：

- (1) 激發學習興趣，樹立數學學習信心。俗話說，興趣是最好的老師。而數學學習興趣的低落是學生感覺到學習困難的重要原因，因此激發學生的數學學習興趣是很重要的。在教學實踐中，可以通過有意識地揭示數學知識的來源和應用，激發學習興趣；其次要善於激疑，引發學生的認知衝突、創設憤悱狀態，引起其學習的需要；再次善於鼓勵和幫助「數困生」，讓他們嘗試到成功的甜頭。有興趣、有信心，是學生數學認知發展的一個先決條件。
- (2) 注意創設問題情景，讓學生對知識的來龍去脈有所瞭解，有助於學生加深對相關問題的認識。對新的概念、定理，盡可能從具體實例出發，展現數學知識的發生、發展過程，讓學生經歷數學發現和創造的過程。也可從正、反兩方面例子讓學生加深對相關知識的理解，避免機械記憶。
- (3) 及時瞭解學生的知識缺陷，採取針對性的補救措施。教師可以通過提問、作業、測驗、個別訪談、調查等方式去瞭解學生是否具備了相關的觀念。例如在講解一元二次不等式的解法等內容時，那麼學生對代數變形、因式分解，方程的解法等內容是否理解與掌握，教師對學生的這些情況瞭解之後，就可以通過小步子、「螞蟻搬家」的方式將難點

分散、突破。在突破難點的教學過程中，教師注意啓發學生暴露思維過程，讓學生有思考的餘地。從而對新的知識進行加工、理解和儲存，使知識結構和學生的認知結構達到有效的整合。這樣，建構缺少的觀念，明晰模糊的觀念，強化已有的觀念，讓學生的數學認知結構逐步完善。

- (4) 在教學中關注不同知識之間的聯繫。既注意數學不同內容之間的聯繫，也不忽視數學與其他學科之間的聯繫。如採用章節的知識結構圖，對所學的數學知識進行歸納總結；或者對某些類似的內容進行辨析、對比，讓學生弄清異同，發現聯繫。同時，也經常引導學生從實際生活中，從物理、化學等鄰近學科思考它們與數學的聯繫。這樣有助於學生建構良好的知識結構網路，從而在問題的解決中應用自如。
- (5) 重視元認知在數學學習中的作用，讓學生經常對自己的數學學習進行反思。例如在作業、測試中發現的問題，先讓學生自己糾正，找出錯誤的原因，然後老師再作講解。又如，本文所提的作業「三步要求」，讓學生在作業詳細解答前、後可思考如下一些問題：如何一題多解，尋找最優解法；問題解答後，對解題過程和結果進行反思，可否對問題進行引申和推廣；如何一題多變、一圖多畫、一法多用、一題多思等等。另外，對「數困生」也應當適當地加強學法指導，引導「數困生」根據自己的特點，尋找設計適合自己的學習方法，培養終身學習的潛能。

正如美國現代教育心理學家沃爾福克（Anita E·Woolfolk）所指出的「認知因素是在能力和努力之外影響學業的另一因素」[4]。對高一學生而言，由於在初中到高中的轉型期，再加上學生學習心理的個性差異，學生數學認知結構與數學知識結構的差距，都會成爲學生學習數學的障礙。因而，在教學實踐中，如何找準不同的學生在數學學習中的具體困難，並有針對性的採取相應的教學策略，是有待我們數學教育工作者繼續探討的課題。

致謝：本文撰寫過程中得到王林全老師和羅碎海老師的悉心指導，在此深表謝意！

作者電郵：pengshg@yahoo.com.cn

參考文獻：

- [1] 魯獻蓉 (1999)。數學學習困難學生的認知特點。《數學教育學報》，1999(4)：55 – 58 頁。
- [2] 何小亞 (2003)。《數學學與教的心理學》。廣州：華南理工大學出版社，2003：83 頁。
- [3] (美) H. A. Simon (1986)。《人類的認知 —— 思維的資訊加工理論》。北京：科學出版社，1986：116 頁。
- [4] 轉引自袁賢瓊 (2001)。關於認知風格與數學解題的調查研究。《數學通報》，2001(1)：8 頁。詳細請參閱 (美) Anita E. Woolfolk(1992). “*Educational Psychology*”. Allyn and Bacon.