哪一杯的蜜液比較甜？ —— 從解題類型談教學策略

劉祥通、施瀚皓
國立嘉義大學數學教育所

緒論

兩個數量 A 和 B 之間的對等關係稱之爲「比」，在數學上用 $A:B$ 來表示（例如，大華有 10 顆彈珠，小華有 7 顆彈珠，他們的彈珠的數目之比爲「10:7」)。而 $A:B$ 對等關係中的前項 A，除以後項 B 所得之商 $\frac{A}{B}$，則稱爲「比值」。

具有相等比值的兩個等值分數所構成的關係式，稱之爲「比例」。比例推理是探討兩個比值（ratios）的等價問題（Piaget & Inhelder, 1970）。比例存在於許多日常生活的情境裡，例如，工資與工作時數成比例關係；若速率固定，距離與時間亦成比例關係。

根據研究顯示（Hart, 1981；Lo & Watanabe, 1997；Noelting, 1980），學生較擅長解決整數比的問題，對於非整數的問題覺得較爲困難。例如，鋼筋每 a 公尺需要 b 元，買同樣的鋼筋 c 公尺需要多少錢？在這個問題中，會出現三種不同類型的數字結構：（1）當 $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{c}{a}$ 都是整數倍時，（2）當 $\frac{b}{a}$ 是整數倍或 $\frac{c}{a}$ 是整數倍時，（3）a、b、c 三數相互都沒有倍數關係時。明顯地，上述三種類型以第（1）類的問題最簡單，第（3）類問題最爲困難。

Karplus、Pulus 與 Stage（1980）指出比較比值的問題要比求未知數的問題要困難。例如「兩杯蜜液，甲杯是用 2 湯匙的蜜汁與 5 湯匙的水溶解而成，乙杯是用 3 湯匙的蜜汁與 7 湯匙的水溶解而成，請問哪一杯的蜜液比較甜？」比起「甲乙兩杯蜜液的甜度一樣，甲杯是用 2 湯匙的蜜汁與 5 湯匙的水溶解而成，已知乙杯是用 3 湯匙的蜜汁，請問乙杯需要用幾湯匙的水溶解而成？」要來的困難。

而比例問題中的語意不同對於學童解比例問題的正確率也是顯著不同的，Lamon（1993）的研究將比例問題依照語意類型分成：熟知的量數（well-chunked measures）、部分 － 部份 － 整體（part-part-whole）、關聯的集合（associated set）與擴張或縮小（stretchers and shrinkers）等四個。「哪一杯蜜液比較甜？」的問題牽涉到蜜汁量、水量、以及蜜液總量的關係，屬於部份 － 部份 － 整體的問題。本研究以比較比值問題爲素材；並據此以探討學生解決這類問題時所使用的策略及想法，並引申出教學上的應用。參與本研究的學生是嘉義市區某小學六年級生二班，共有 75 名。

前導試驗

在提出比較比值問題以研究學生的作答情形之前，研究者採用以下問題針對學生作前導研究（pilot study），以概略了解學生可能的回答情形。問題與解題類型如下：問題 1、有兩杯蜜液，甲杯是用 2 湯匙的蜜汁與 4 湯匙的水溶解而成；而乙杯則是用 6 湯匙的蜜汁，想要調成和甲杯一樣甜，那乙杯要加多少湯匙的水？

許多學生採用倍數法解題：乙杯的蜜汁與水量是甲杯的 3 倍，因此是 $(6 \div 2) \times 4$。亦有不少學生採用單價法，也就是先求出 1 湯匙的蜜汁要用 2 湯匙的水，乙杯則需 6 湯匙蜜汁，也就是 $(4 \div 2) \times 6$ 。

問題 2、甲杯用 3 湯匙的蜜汁，用 5 湯匙的水；乙杯用 9 湯匙的蜜汁，想要調成和甲杯一樣甜，那乙杯要加多少湯匙的水？此時大部分學生便選擇用倍數法解題，也就是 $(9 \div 3) \times 5 = 15$。也有學生用單價法，$5 \div 3 \times 9$，但有部分學生不會寫出 $\frac{5}{3}$ 表示相除的結果，以致於用 $1.66 \times 9 = 14.94$ 產生了近似值，也有部分學生面對除不盡的困擾而停止解題。

後續探索

爲了探討比值是分數的比值大小的比較問題，最後用問題 3：「有兩杯蜜液，甲杯是用 2 湯匙的蜜汁與 5 湯匙的水溶解而成，乙杯是用 3 湯匙的蜜汁與 7 湯匙的水溶解而成，請問哪一杯的蜜液比較甜？」當作正式的試題考驗學生。

此類型的比較比值問題，比起前導試驗求未知數的問題要來的困難。研究者希望學生能由之前求取未知數的作法將本問題轉化成「甲乙兩杯蜜

液的甜度一樣，甲杯是用 2 湯匙的蜜汁與 5 湯匙的水溶解而成，已知乙杯是用 3 湯匙的蜜汁，請問乙杯需要用幾湯匙的水溶解而成？」的問題來求解，或用單位量找出比例的倍數關係。

如同研究者預期，大部份學生的解法與前導試驗的策略一致，如以下方法：

(1) 利用單價法（或稱比率法）
甲杯蜜汁 2 湯匙時，水需 5 湯匙 $\Rightarrow$ 蜜汁 3 湯匙時，水 $(5 \div 2) \times 3 = 7.5$ 湯匙，因此乙杯較甜。

(2) 利用倍數法
求出甲杯的水量為 $(3 \div 2) \times 5$，再與乙杯的 7 湯匙水相比。

(3) $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$
$\frac{2}{5}$ 與 $\frac{3}{7}$ 分別是甲乙蜜汁與水兩量相比較的比值。學生利用比值的計算認為 3 湯匙蜜汁配 7 湯匙的水比 2 湯匙蜜汁配 5 湯匙的水還甜。

(4) $\frac{2}{7} < \frac{3}{10}$
類似於第一種的類型；$\frac{2}{7} < \frac{3}{10}$ 則是利用蜜汁與 (蜜汁 + 水) 的比值相比；此時的 $\frac{2}{7}$ 與 $\frac{3}{10}$ 更隱含著濃度的觀念，也類似利用濃度來比較。

但也有學生出現如下比較罕見的解法：

(1) $(5 \div 2) > (7 \div 3)$，甲含水的成份多，所以乙較甜。
學生利用 $5 \div 2$ 與 $7 \div 3$ 求出 1 湯匙的蜜汁需要配上幾湯匙的水量來比較大小。而這種作法也可以說是單價法的另一種運用。

(2) $(3 \div 2) > (7 \div 5)$
學生利用兩杯蜜汁與水的倍數相比，得到乙杯蜜汁的量是甲杯的 1.5 倍；而水量是甲杯的 1.4 倍，所以乙比較甜。這種作法是由倍數法的

觀點出發，而比較兩倍數的大小。

(3) 利用倍數法求出若甲杯為 3 匙蜜汁，水應為 7.5 匙；對照乙杯的蜜汁有 3 匙，水有 7 匙，僅注意到 $7.5 > 7$，而誤答甲杯較甜。

(4) 蜜汁：$3-2=1$，水：$7-5=2$，$2>1$
有學生誤認乙杯的蜜液較淡；因為乙杯只比甲杯多 1 湯匙的蜜汁，卻比甲杯多 2 湯匙的水。顯然此生利用絕對差的觀點作比較。

學生的解法有如此多種，假使老師能對學生的解題方式有所認識，並經常思考各種學生的解法，不僅能豐富自己對兒童的數學知識，若能對學生的各種想法有所了解，有助於解讀學生的自然想法，並能針對其想法賦予意義。

比例教學的策略

上述以「單價法」思考問題的學生從「$5 \div 2$」或「$7 \div 3$」著手，使用這些方法的學生未必都能掌握單位化的意義，此時老師可以藉由提問「甲杯（每）1 湯匙蜜汁要用幾湯匙水，是用 $5 \div 2$ 還是 $2 \div 5$？」以幫助他們掌握單位化的意義。

以「倍數法」思考問題的學生從「$3 \div 2$」或「$7 \div 5$」著手，然而使用上述方法的學生也未必能掌握「$3 \div 2$」或「$7 \div 5$」運算的意義。老師若能提問「$3 \div 2$」的結果代表什麼意義？或「$2 \div 3$」又是什麼意義？可幫助學生更清楚自己的解題策略。

若以比值或濃度為出發點思考，則 $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$ 與 $\frac{2}{7} < \frac{3}{10}$ 為代表。但教師若不能確定學生回答 $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$ 時，是否真的了解比值的涵意，教師可繼續追問 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{3}{7}$ 所代表的意義；或者詢問學生能不能解釋 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{3}$ 的意義；亦可請學生解釋若水比上蜜汁 $\frac{5}{2} > \frac{7}{3}$，這時甲或乙誰比較甜？此外亦有學生不能了解為何 $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$ 與 $\frac{2}{7} < \frac{3}{10}$ 這兩種方法一樣適用；除了由濃度的定義來看：1 匙蜜汁配 3 匙水的意義與蜜汁佔全部（體

積）的 $\frac{1}{1+3}$ 是同義，因此比較 $\frac{5}{2}$ 與 $\frac{7}{3}$ 的意義等同於比較 $\frac{2}{7}$ 與 $\frac{3}{10}$ 的大小。亦可由數學結構出發：

設 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$（a、b、c、d 四數皆為正）$\Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ac + ad < ac + bc$ $\Leftrightarrow a(c + d) < c(a + b) \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}<\frac{c}{c+d}$。

因此 $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$，$\frac{2}{5+2}$ 也會小於 $\frac{3}{7+3}$。而這結果也類似所謂的合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

將這部份原理配合實際例子或許亦能幫助解答學生的疑問。

若學生能正確求出相對的水量或蜜汁匙數，但產生誤答情形，則教師再提醒學生「什麼狀況下喝起來較甜？」希望能提醒學生注意到「水量相同蜜汁多」或是「蜜汁量相同水較少」。

針對學生以「絕對差」的運思教學，老師應該用「相對差」的觀點，或以求未知數的比例問題來引導，將所得的 7.5 與 7 做一連結來比較（參考下表一），即乙杯蜜液只有 7 湯匙的水，比甲杯相同甜度的 7.5 湯匙水還少，所以乙杯較甜。也就是以列表方式描述蜜汁與水量的「共變」關係，讓學生發現「不變」的比值，確定學生了解之後再繼續深入探索；如此可讓解題過程與策略透明化，以幫助學生了解。建議教學者可多給學生機會透過表徵工具幫助解題，學生的解題能力亦會獲得更好的發展。

蜜汁的湯匙數	水的湯匙數
1	2.5
2	5
3	?

表一：蜜汁與水之數量對照表

參考文獻

劉祥通、周立勳（1999）。國小比例問題教學時實踐課程之開發研究。《國立台中師範學院數理學報》，3(1)，頁 3.1 – 3.25。

Hart, K. M.(1981). *Children's understanding of mathematics 11-16*, London: John Murray Ltd.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K.(1980). *Early adolescents' structure of proportional reasoning*. In Proceedings of the fourth International Conference for Psychology of Mathematics Education, Berkeley, California. pp. 136 – 142.

Lamon, J.(1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research Mathematics Education, 24*(1), pp. 41 – 61.

Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Development ratio and proportion Schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), pp. 216 – 236.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I – Problem structure at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, pp. 331 – 363.

Piaget, J.,& Inhelder, B.(1970). *The psychology of the child*. New York: Basic Books.

作者電郵：liust@mail.ncyu.edu.tw