從表徵觀點探討國一新生分數概念

蔡鳳秋
國立嘉義大學數學教育研究所研究生
陳晚蓁
雲林縣斗六國中教師

一、前言

許多研究顯示分數的學習對兒童而言是相當困難的（Cramer, Post & delMas, 2002；楊德清、洪素敏，2003）。因此容易產生學生對分數的學習只是流於短暫的記憶解題偏方，且無法使用不同的解題策略來應付單位分數與真分數的學習（林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996）。研究者曾實際調查研究任教班級之學生發現，多數學生可以輕易回答同分母的加減運算，但對於異分母的加減法，則會有分母加分母、分子加分子的情形出現，例如：$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{5}{8}$。學生對於分數缺乏理解，似乎在不了解分數意義的情況下，以機械性的記憶規則完成計算；Kerslake（1986a）便發現，英國十三、四歲的學生依靠死背的方法來處理分數的運算。國內以往的研究顯示，我國國小學童對分數概念難以理解，分數符號與分數意義疏離，只會機械式地使用分數算則來解題而不了解算則的意義等（楊壬孝，1988；林福來、黃敏晃，1991；呂玉琴，1991；陳靜姿，1997）。

但是分數的學習卻也是學生追求更高數學知識的必經途徑；同時分數之四則運算亦是國一新生必須學習的單元，因此瞭解國一學生分數概念發展之情況是有必要的。本研究希望藉由探討國一學生的分數概念，以作為教師未來教學參考之依據，與擬定適宜的教學方針及設計教學方案，幫助學生學習分數的相關課題。基於此，本研究的研究目的乃是要從表徵觀點探討國一新生分數的概念。

二、文獻探討

本節分兩部份，首先對國內外有關分數概念及表徵的相關文獻作回顧。

1. 表徵重要性

表徵（representation）是利用某一種形式，將事物或想法重新表現出來，以達成溝通的目的（蔣治邦，1994）。而數學學習應該要注重不同表徵系統之間的連結，並且能夠利用多樣化的表徵方式來代表數學概念（游自達，1995）。此外，一些學者也指出（Brenner, et al., 1999; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Fennell & Rowan, 2001），善用多樣化的表徵形式，例如圖形、操作具體物、或是寫出數學方程式 …… 等等，將有助於學生組織思考以及分析問題的呈現。且透過圖形、具體物、語言、符號 …… 等等，這一類外在的數學表徵形式，可以得知學生內部的數學思考（NCTM, 2000; Cramer et al; 2002）。而 Lesh 等人（1987）也認為經由不同形式的數學表徵轉換過程，能夠得知學生對於概念意義的掌控情形。因此，經由數學表徵的轉換，不但能夠幫助學生以一種有意義的方式來學習數學概念，還能夠提供學生許多克服認知失衡的契機（Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Post, Wachsmuth & Behr, 1985）。綜合以上所述，數學表徵的學習將有助於我們思考、溝通、解題、以及詮釋事物和現象的重要工具，因此培養學生數學表徵能力是刻不容緩的。

2. 分數的迷思概念的探討

許多研究顯示分數的多重意義經常是造成學生學習分數困難的重要原因之一（Behr, et al, 1983; Behr & Post, 1988; Dickson, 1984）。因而分析分數在不同問題情境中的認知意義，有助於分數概念的瞭解。

依據相關的研究結果顯示（呂玉琴 1991；劉世能，2002；林彥宏，2002；陳晚蓁、楊德清，2002；楊德清、洪素敏，2003），影響學生分數概念的因素包含：

a. 忽略給定的單位量：

如何賦予一個分數意義，單位量的指認是關鍵因素。許多學生無法正確的指認出單位量（陳晚蓁、楊德清，2002；楊德清、洪素敏，2003），例如：當我們要求學生比較 100 元的 $\frac{2}{5}$ 與 70 元的 $\frac{3}{7}$ 的大小時，部分學

生僅針對 $\frac{2}{5}$ 及 $\frac{3}{7}$ 作比較，忽略了單位量（100 元及 70 元）。有些學生僅注意到分數部分的大小，自我假設在同一情境中出現的各個分數具有相同的單位量（林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996）。

b. 受分子控制：

犯此類錯誤的學童在處理分數問題時，只考慮到問題中的分子，解題過程深受分子的影響。例如：詢問學生 $\frac{1}{6}$ 盒（一盒有 12 顆）糖果有幾顆？學生會回答「1 顆」；$\frac{2}{6}$ 盒有幾顆？學生回答：「2 顆」。顯然學生的回答乃是受分子的影響。

c. 受分母控制：

與受分子控制類似，犯此類錯誤的學童在處理分數問題時，只考慮到問題中的分母，解題過程深受分母的影響（呂玉琴，1991；Behr et al, 1984；Hunting, 1984; Mack, 1993）。例如：紙上畫了 15 個星星，當我們要求學生圈選出代表 $\frac{4}{5}$ 的星星數目，因為分母是 5，所以學生僅圈出五個星星來代表 $\frac{4}{5}$。

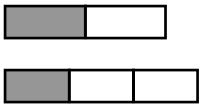
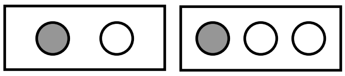
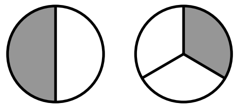
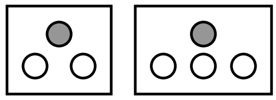
三、研究方法與對象

本研究的主要目的乃是要探究國中一年級新生分數概念的理解；因此，本研究採用半結構式訪談（semi-structured interview）進行資料收集，並視受訪者實際回答的內容加以深入詢問，以增加資料的豐富性與可信性，但是訪談者對於受訪者的回答以中立的態度待之，且不做任何的價值批判。

研究樣本選自雲林縣某中型國中，全校共四十二個班級，其中一年級共有十三個班。因此，從研究者所任教的班級依隨意取樣，依照班級數學成績高、中、低三個層次各選取一位學生，共三位做為研究訪談的對象。S1、S2、S3 分別代表高程度、中程度、低程度學生。

四、研究結果與討論

問題一：下列哪一個圖形最適合用來說明 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 哪一個分數比較大？

1	2	3	4
			

高程度的學生大概可以指出單位量在圖示分數時的重要性，但是中低程度的學生卻無法明確指出原因。

原案一之 1

S1 知道選項 3 爲正確的答案，但是研究欲想更深入的瞭解學生的概念，於是繼續追問 S1 不選 2 的原因。

T： 那選項 2 呢？

S1：圖形表現的方式不恰當。

T： 爲什麼你會覺得圖形表現的不恰當？

S1：數目。

T： 那你認爲應該要多少才比較好？

S1：就一樣的數目來畫。

T： 那這一題你認爲應該要怎樣會比較好？

S1：6 個。

S1 知道選項 2 的單位量並不恰當，應該以 6 個來畫比較好，雖然他沒有明確的指出「單位量」，但我們仍然可以嗅出 S1 的單位量概念。

原案一之 2

T： 爲什麼選擇選項 1？

S2：用這種（指著長條形表示分數）比較不會錯，用圓形比較複雜。

T： 你覺得選項 3 這種表示法有錯嗎？

S2：沒有錯。

T： 那選項 2 跟選項 4 呢？

S2：有時候我會畫錯。

T： 如果選項 3 中，兩個圈圈畫不一樣大，可以嗎？

S2：可以。

學生認爲選項 1 才是恰當的表示法，因爲選項 1 是以長條形表示，相對於圓形比較容易做等分的動作；而在離散量的表徵方面選項 2 跟選項 4，學生則表示在以往的經驗中，常常容易做錯而不習慣以離散量來圖示分數，由此可知學生並沒有明確的單位量概念，尤其他認爲選項 3 中的圓形可以不一樣大，更可以得到佐證。

T： 那選項 2 呢？選項 2 可以嗎？

S3：不可以。

T： 爲什麼？

S3：因爲面積一樣大。

… … … …

T： 那你可以從選項 2 中，看出哪一個（指 $\frac{1}{2}$ 跟 $\frac{1}{3}$ ）比較大嗎？

S3：應該不可以，因爲這個圓形的地方都很像，他畫 3 個裡面的 1 個，會讓人誤以爲 $\frac{1}{3}$ 會比較大。

雖然學生可以分選項 2 中的兩個圖形分別代表 $\frac{1}{2}$ 跟 $\frac{1}{3}$ ，但學生 S3 與 S2 認爲選項 2 中代表 $\frac{1}{2}$ 跟 $\frac{1}{3}$ 的灰色區域都是「1 個圈圈」，而這兩個「圈圈」面積幾乎一樣大，所以無法表示出分數的大小。因此，也可看出。S2、S3 對於單位量概念並不明確。

問題二： 在下面的數線上，表示 $\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$ 的結果。

在學生學習的過程中可能對數線完全沒有接觸過，因此三位受訪者對於數線的認識相當的薄弱。3 名受訪學生均表示沒學過，當被問到 0、1 代表什麼意思時，學生也說不出個所以然，連表示方向的箭頭，也認爲不是畫數線必須的要件。因此他們對於數線三要素（原點、方向、單位長）的認識，並不十分清楚。有的學生在數線上表示了它的答案，卻無法清楚解釋原因。例如：

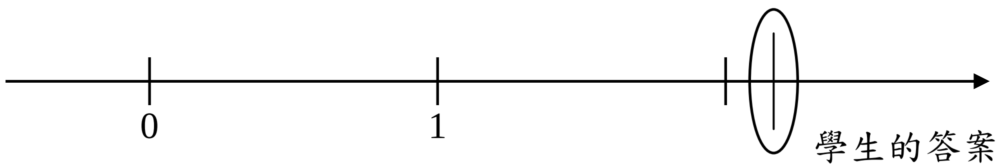
<u>原案二之 1</u>

T： 你是如何相減的？

S2：$\frac{5}{4}$ 先減 $\frac{3}{4}$，然後約分成 $\frac{1}{2}$。

T： 那答案爲什麼標在這裡呢？（參閱下圖）

S2：因爲這裡是 1，所以這邊應該是 2，那旁邊這裡再一點點應該是 $\frac{1}{2}$。



學生並未以圖示的方式來做減法，而是先利用紙筆運算得出結果 $\frac{2}{4}$，再將運算結果約分成 $\frac{1}{2}$ 後，才把答案標示在數線上。不過，他並無法在數線上標示出 $\frac{1}{2}$ 的正確位置，僅在數線上 2 的位置右邊一點點，來表示答案 $\frac{1}{2}$。

<u>原案二之 2</u>

T： 那一開始，你這邊取這些線段的目的是什麼？

S3：… …

T： 等分嗎？

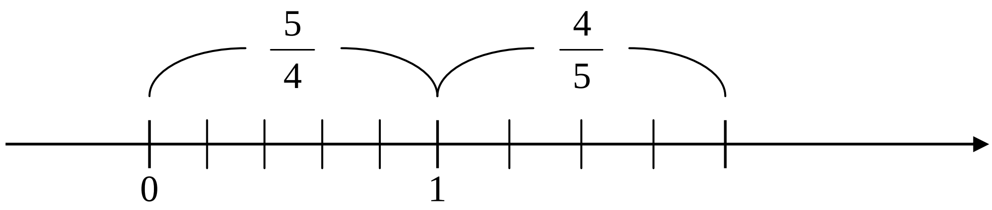
S3：對。

T： 那這邊（指著學生所畫的 $\frac{5}{4}$ 的圖示）幾等分？

S3：五等分。

T： 那你所畫 $\frac{4}{5}$ 的圖示，也是因為 4 而四等分嗎？

S3：對。



這位學生瞭解可以利用等分線段的方式來表徵分數，但是數線上的原點、單位長，或箭頭等標示似乎對他來說是無意義的。同時由圖示上看來，他完全缺乏分數概念，認為 $\frac{5}{4}$ 是五等分的意思，與分母的數值是多少無關，完全由分子大小來決定將單位量幾等分，缺乏對分數的理解。

問題三： 如果方塊 A 代表 1；方塊 B 代表 $\frac{1}{2}$，那麼你需要幾塊的方塊 A，與幾塊的方塊 B，來表示 $2\frac{1}{2} \times 3$ 的結果？

學生並不會以方塊 A、B 的方式呈現他們的想法，也就是說，當被問到什麼是「×3」或什麼是「$2\frac{1}{2} \times 3$」時，學生稍做思考，便會以 $2\frac{1}{2} \times 3 = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$ 來解釋，但是當要他們以方塊 A、B 來表示 $2\frac{1}{2} \times 3$ 的結果時，卻是以算式來解。請看以下的例子：

原案三之 1

T： 那像這一題，$2\frac{1}{2}\times 3$ 的意思呢？

S1：等於 $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$。

訪談原意是希望學生透過方塊 A、B 的個數來解釋 $2\frac{1}{2}\times 3$，但是學生仍是以同數累加 $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$ 來回答，雖然他有整數倍的概念，但卻無法以方塊 A、B 的個數來表達。

原案三之 2

T： 你的答案是 7 塊 A，1 塊 B，跟老師解釋一下，你是怎麼得到的？

S2：$\frac{5}{2}\times\frac{3}{1}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$。

T： 從哪裡看出 7？

S2：因爲它（鉛筆指著帶分數的整數部分 7）代表 7 個 1 啊。

T： 那爲什麼是 1 塊 B 呢？

S2：因爲分數只有 $\frac{1}{2}$ 啊。

學生解出了答案爲 7 塊 A、1 塊 B，但並非直接透過方塊 A、B 的倍數來操作，是先算出乘法的結果爲 $\frac{15}{2}$，化成帶分數 7 之後，因爲整數部分 7 代表 7 個 1，而 1 又代表方塊 A，所以是 7 塊 A；而分數部分 $\frac{1}{2}$ 便代表 1 塊 B。

原案三之 3

S3：可以有兩種作法：3、2、6，3、1、3，所以是 $2\frac{1}{2}\times 3=6\frac{3}{2}=7\frac{1}{2}$；

另一種方法是把它化成假分數來乘（$\frac{5}{2}\times 3=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$）。

T： 如果是你的話，你喜歡哪一種？

S3：第一種。

T： 從 $6\frac{3}{2}$，可看出幾塊 A，幾塊 B 嗎？

S3：也可以啊，用 6 塊 A，然後是 3 塊 $\frac{1}{2}$。

學生 S3 的作法與 S1 類似，在乘以 3 之前，他們都並未將 $2\frac{1}{2}$ 化爲假分數 $\frac{5}{2}$，而是直接將 $2\frac{1}{2}\times 3$ 得到 $6\frac{3}{2}$，雖然他最後也將 $6\frac{3}{2}$ 化爲 $7\frac{1}{2}$，但經由訪談者的提問，學生也同意可將答案表示爲 6 塊 A，3 塊 B。

問題四： 如果依照小明的想法，你認為「$2\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}$」可用多少個「●」來表達？所代表的數值為何？

步驟	圖示	代表的數值
步驟一	●●●●●●●●●●●●	1
步驟二	●●●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●●●●	2
步驟三	●●●●	$\frac{1}{3}$
步驟四	●●●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●●●● ●●●●	$2\frac{1}{3}$

此題，研究者希望透過離散量的輔助，讓學生可以利用「黑點」來表徵分數倍的概念。不過，學生仍藉著分數算則解出答案，再換算爲黑點數目來回答問題，例如：

<u>原案四之 1</u>

T： 你的答案，12 跟 1，是怎麼來的？

S1：答案，乘出來的答案：$2\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{21}{21}=1$。

T： 爲什麼你不認爲你算出來的答案 1，代表 1 個黑點？

S1：因爲圖示上有寫，「代表的數值」1，圖示就是 12 個黑點。

學生表明他是經過計算得到答案 1，再對照附表得到答案。

原案四之 2

中低程度的學生對於離散量表徵的意義不太清楚，也就是他們並不瞭解黑點與數之間的關係。例如：

T： 爲什麼答案是 12 跟 1？

S2：因爲表裡面，代表的數值 1 就是 12 個黑點呀！

T： 你的算出來答案 1，可能代表黑點？

S2：可能。

T： 那爲什麼你不會寫成 1 個黑點？

S2：因爲這邊有寫「代表的數值」。

T： 所以你並不是十分確定 1 代表什麼囉？

S2：對。

T： 如果問題裡只問幾個黑點，你會答多少？

S2：1。

學生利用離散量等分的概念，將代表 $2\frac{1}{3}$ 的 28 顆棋子 7 等分後，取出其中的 3 等分而得到答案。研究者猜想，許多學生不一定瞭解離散量的表徵方式，不過此題答對學生，幾乎都是先解出答案 1，再對照附表得到答案。從與這位學生的訪談中，證實了研究者猜想，學生並不十分確定所算出來的答案「1」其真正代表的意義，如果題目設計得讓計算出的答案不是剛好爲 1，也許可以看到更多學生的迷思概念。

五、結論與建議

1. 結論

本研究根據資料分析結果，歸納出以下幾種學生對於分數的表徵所產生的現象：

a. 忽略單位量的差異

單位量概念對於分數學習是非常重要的，但是研究者發現一般學生的單位量概念並不穩固，往往無法察覺問題中單位量的差異，無法正確的指認出單位量（Cramer, Post, & delMas, 2002；陳晚蓁、楊德清，2002；楊德清、洪素敏，2003）。問題二和問題三要學生從圖形中比較單位分數的大小及表示出分數相減後的位置，從學生的訪談回答及在數線上標記出分數的位置，可以發現學生似乎忽略了單位量的存在，而只是依據圖形的大小及對線段的等分來進行解題。

b. 缺乏對表徵方式的多元化（數線、連續量、離散量）

從五個問題中均發現受訪者在進行解題時易忽略掉表徵形式所給予的資訊及其所表示的意義，但是研究結果則顯示出能夠根據問題情境，彈性的運用適當的數學表徵，例如具體操作的、視覺的、口語的、圖表的、符號的 …… 等等具體或抽象的方式，並且在單獨的表徵系統之內以及各個表徵系統之間靈活的轉換，是發展數學思考和培養解決問題能力的基本要素（林碧珍，1990；蔣治邦，1994；Brenner et al., 1999; Cramer, Post & delMas, 2002; Dreyfus & Eisinberg, 1996; Lesh, Post & Behr, 1987）。

2. 建議

a. 善用多種不同形式的表徵以輔助教學

由於數學教科書中多以離散量的問題佈置情境，但是對於連續量的教學情境較少提到，因此教師在進行教學時，表徵方式可盡量多元化，以培養學生選擇與應用的機會。

b. 教學中教師應多鼓勵孩子使用不同的方式去表達數學概念

當孩子能運用不同的表徵方式，將他們的數學概念及想法呈現出時，表示孩子的概念已穩固地建立根基，而這也與一些相關研究相呼應（蔣治邦，1994；楊德清、洪素敏，2003）。

六、參考文獻

呂玉琴（1991）。分數概念文獻探討。台北師院學報，第四期，573 – 605。

呂玉琴（1996）。國小教師的分數知識。台北師院學報，第九期，427 – 460。

林福來、黃敏晃、呂玉琴（1996）。分數啓蒙的學習與教學之發展性研究。科學教育學刊，4（2），161 – 196。

林彥宏（2002）。國小五年級學童分數概念的診斷與補救教學。台南：台南師範學院教師在職進修數學碩士學位班碩士論文（未出版）。

邱山桐（2003）。《九年一貫國中課程銜接教材》。台南：翰林。

教育部（2000）。《國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域》。教育部。

教育部（2003）。《樂在數學—國民中小學數學教學參考手冊》。台北：教育部。

黃芳玉（2003）。國小六年級學生數學表徵能力與計算能力之研究。嘉義：嘉義大學數學教育研究所說是論文。（未出版）

陳晚蓁、楊德清（2002）。國一新生數學迷失概念分析。九年一貫數學領域課程基礎研習手冊。

劉世能（2001）。臺灣北部地區國小高年級學童分數概念之研究。台北：國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。

楊德清（2000）。國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法。科學教育學刊，8（4），379 – 394。

楊德清、洪素敏（2003）。比較分數大小：從具體、半具體至抽象符號表徵之教學行動研究，南師學報，37(2)，75 – 103。

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau, (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91 – 126). New York: Academic Press.

Behr, M. J. & Post, T. R. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Eds.), *Teaching mathematics in grades K-8* (pp. 190 – 229). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-National Comparison of Representational Competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 5, 541 – 547.

Cramer K. A., Post T. R. & delMas R. C. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111 – 144.

作者電郵：chagi12345@yahoo.com.tw