

教授聯立二元一次方程的一些建議

許慧貞

1999 數學課程內容有關的部份及一般課本的教學流程

根據香港課程發展議會 1999 年編訂的中學數學科課程綱要，有關聯立二元一次方程的基礎部份課題如下：

4.3 第三階段的學習重點

4.3.1 數與代數範疇

代數關係式與函數

一元一次方程	<ul style="list-style-type: none">• 建立及解一元一次方程
二元一次方程	<ul style="list-style-type: none">• 繪畫及探究二元一次方程的圖像• 以代數方法及圖解法建立及解聯立方程• 認識圖解法的近似性質

4.3.2 度量、圖形與空間範疇

以解析法學習幾何

坐標簡介	<ul style="list-style-type: none">• 明白及運用直角坐標和極坐標系統來描述平面圖上點的位置• 能夠利用直角坐標系統的序偶找出平面上的點
------	---

一般課本的教學流程包括下列章節：

- 一元一次方程
- 認識直角坐標系統
- 二元一次方程的圖像
- 解聯立二元一次方程 —— (i) 代入法、(ii) 消元法、(iii) 圖解法
- 應用題

我認為只根據教科書將內容講授並不足夠，穿插加入下列一些重點，更能說明這五個章節之間的關係，編織出較清晰的脈絡。

一些建議加插的重點

1. 單一條二元一次方程無解？

請學生比較以下兩題：

解	$2x + x = 12$	(1)
和 解	$2x + y = 12$	(2)

方程 (1) 得 $x = 4$ ，沒有難度。但對於方程 (2)，學生或會認為左方的 $2x + y$ 不能簡化，故無解！

老師應引導學生認識「什麼是解？」這個問題。兩個數 x 、 y 如「符合」 $2x + y = 12$ ，便是 $2x + y = 12$ 的解； x 甚至可以不等於 y 。從這角度看，方程 (2) 比方程 (1) 寬鬆得多了，可以輕易計算出幾組解。它甚至有無限多個解！^(#)

在學生未學習二元一次方程的圖像時，可以請學生嘗試去解單一條二元一次方程，學生即面對一個問題——如何有條理地表達這多個解？

將這多個解的 x 及 y 有序地表列，可以作為引伸至直線圖像的伏筆；稍後教授二元一次方程的圖像時，再引導學生欣賞在坐標系統畫得的直線能有效地表達它眾多的解。

2. 二元一次方程本身和它在坐標系統的化身（直線）

經學習後，學生懂得依照下列步驟畫出二元一次方程的圖像：

- (i) 計算出若干個符合二元一次方程的 x 、 y 組，將之表列
- (ii) 用序偶 (x, y) 表示每一 x 、 y 組
- (iii) 將所有序偶 (x, y) 正確標示在直角坐標系統上
- (iv) 將點連成一直線

一般學生只是將直線圖像理解為由方程繪畫而成的「產物」。

二元一次方程本身和它在坐標系統中的化身（即直線）一化為二又二合為一的關係，是一個較為深入的數學概念，學生熟練地畫出圖像不等於他真正明白。對於一個初中生，真正明瞭這個概念是一個漸進的過程。

在這裡值得討論同在直線上其他點的序偶，包括畫線初步未有涉及的點及延長直線所得的點，與二元一次方程本身有什麼關係。

(#) 是否引伸至這點視乎學生的水平而定。

3. 「聯立」的含義及「圖解法」的特點

單一條二元一次方程有（無窮）多個解，那麼兩條「聯立」二元一次方程有多少個解？

這裡有必要說明數學邏輯「及」的意義——同時符合兩條方程的解才是「聯立」二元一次方程的解。這個概念可以在應用題的實例中加以深化。

沿用「聯立」的含義，想像一下：如果我們將兩條方程各自求解，各得若干個符合該單一方程的 x 、 y 組，從中對照尋找相同者，行得通嗎？事實上我們甚少這樣做，就算行得通，又是否失於笨拙呢？

「圖解法」是基於同一個理念，但做法瀟灑得多了。

在圖解法，兩條二元一次方程是各自為政，各自畫取直線其實是各自求解！只要將兩條直線畫在同一個圖，如有需要，將之延長至相交，便大功告成了。

這裡還請學生反思：「圖解法」中的相交點為什麼便是聯立方程的解呢？

4. 有靈感嗎——聯立方程如何用代數方法求解？

在正式教授任何聯立方程的解法之前，請學生「腦震盪」一會，依次考慮例如以下四組聯立方程，用他們認為合理的方法求解，或會有意想不到的收穫呢！

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 12 \\ x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 12 \\ x = y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 12 \\ y = 4x \end{cases}$$

第 1 及第 2 題表面有點無聊，卻是不失為導入「代入法」正規步驟的一個方法。

5. 「代入法」和「消元法」的異同

代入法和消元法各有千秋，有時是消元法較快，有時是代入法較佳，有更多情形是兩者差不多；應鼓勵學生多觀察思考，有策略地選取適合的方法（請參看下列第 6 點）。

代入法和消元法表面的步驟不同，但都是設法將兩條方程「互動」而產生一條一元一次方程，這個過程亦體現了「聯立」的含義；求得其中一個未知數（ x 或 y ）之後，結已解開，之後便易辦了。

6. 選擇代入法／消元法的策略 —— 方程可以「貌相」嗎？

對於例如下列各題聯立二元一次方程，可引導學生討論：

- (i) 「代入法」還是「消元法」較佳？為什麼？
 (ii) 要將整條式乘大或縮小嗎？倍數是多少？

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7y \\ 4x - 9y = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - y = -14 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 5 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 8y = 5 \\ 3x + 7y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y = -24 \\ 7x - 6y = 10 \end{cases}$$

在學生有兩種方法的一手經驗之後，讓他們暫且放下筆，發表意見，並要求他們比較及口述計算步驟，教導他們有意識地監控和表達自己的解題過程。

討論是開放的，各人會有不同的觀點呢！

7. 圖解法的優點

學生的學習經驗尚淺，未必理解圖解法的重要性。如果目標純為求解，較便捷的代數法（代入法或消元法）自然是首選。

可是，當要討論聯立二元一次方程「解的性質」——「有唯一解」、「有無限多個解」及「無解」的三種情況時，圖解法提供了有啟發性的思考方向，「兩條直線相交時有多少種可能性？」這種思考恐怕在純代數範疇是無法達致的。在這裡，圖像思考與純代數思考互相補足，有相輔相成的效果。

結語

上述數點旨在比較單一條二元一次方程及聯立二元一次方程，以及代入法、消元法及圖解法，並嘗試說明二元一次方程圖像的重要性。

老師教學時，以教科書為藍本之外，加入適當的補充，或可免除學生「只見樹木，不見森林」之弊，建立較通達穩固的概念。

參考資料

香港課程發展議會（1999）。《中學課程綱要：數學科課程綱要（中一至中五適用）》。香港：政府印務局。

陸慶桑（1995）。「難易之間：數學教與學的一些感想」。載於蕭文強（編）《香港數學教育的回顧與前瞻》，頁 119 - 128。香港：香港大學出版社。

作者電郵：estella.hui@gmail.com