為甚麼不學幾何？

馮振業
香港教育學院數社科技學系

楔子

最近與一隊來自教統局及考評局的同工開會，討論新高中數學課程。諮詢文件提出數學科由必修部分（約佔 10 % – 12.5 % 課時）和一個選修單元組成，連同選修部分，數學科約佔總課時百分之十五。學生不一定要修讀選修單元，而選修單元則是從「微積分與統計」和「代數與微積分」兩者之中任擇其一（課程發展議會與香港考試及評核局，2005）。筆者即時的反應就是：爲甚麼選修單元不可以學幾何？

當時收到的訊息，除了一大堆關於如何保障數學教師飯碗的考慮之外，就只有（甲）微積分很重要；和（乙）以幾何爲主體的選修單元恐怕乏人問津。筆者希望藉本文爲幾何討個公道，雖然心知無法改變決策者的取向，但至少要向新一代的數學教師說說學習幾何的價值，好待日後有機會撥亂反正。

科學界的立場

科學工作者對幾何的高度評價最是明顯，愛因斯坦甚至認爲歐氏幾何的邏輯系統是奠定西方科學發展基礎的兩項偉大成就之一（Calaprice, 1996, pp. 179 – 180）。近年，權威科學團體英國皇家學會（Royal Society）曾就幾何的教與學提出詳盡的意見（Royal Society, 2001），筆者認爲以下幾點特別值得我們深思：

1. 幾何使人愛上數學。

   It is a matter of national importance that as many students as possible fully develop their mathematical potential. Geometry, with its distinctive appeal, should make mathematics attractive to a wider range of students. (Royal Society, 2001, p. 21)

2. 幾何在英國數學課程的地位已經下滑，連名字也給拿掉（改成「圖形、空間與度量」），這情況必須得到糾正。

We recommend that the title of the attainment target Ma3 of the National Curriculum be changed from "Shape, space and measures" to "Geometry". (Royal Society, 2001, p. 5)

3. 應透過學習幾何，鼓勵學生建立與其年齡和成就相稱的邏輯論證。

   We recommend that the mathematics curriculum be developed in ways which recognize the important position of theorems and proofs within mathematics and use the study of geometry to encourage the development of logical argument appropriate to the age and attainment of the student. (Royal Society, 2001, p. 10)

4. 中學生學習幾何的課時，應佔總體數學學習課時的百分之二十五至三十。

   We recommend that geometry should occupy 25 % – 30 % of the teaching time, and hence a similar proportion of assessment weighting, in the 11 – 16 mathematics National Curriculum. (Royal Society, 2001, p. 13)

華人社會對幾何證明特別看重，最近在中國大陸出現的類似美國加州的數學論戰，便在幾何證明一環鬧得熱騰騰。一群以北京大學教授姜伯駒爲代表的數學家，對淡化幾何證明表示極度不滿，建議擱置新的課程標準。（張，2005）

建議中的新高中數學課程，單計必修部分，幾何（包括三角）合共約佔課時的 $\frac{66}{270}$，略少於 25 %。對修讀選修單元的學生而言，幾何所佔的課時就只有約 $\frac{66}{270+135}$（課程發展議會與香港考試及評核局，2005），少於 17 %，遠低於皇家學會的建議。

全人教育的考慮

即使我們不關心淡化幾何，會否令下一代無緣攀上科學的前線，單看全人教育，學習幾何仍有深刻的意義。高度肯定學習幾何在全人教育的價値的，遠的有大思想家柏拉圖，近的有美國總統林肯。柏拉圖認爲「學習幾何能把靈魂引向真理，能使哲學家的心靈轉向上方，而不是像現在這樣

錯誤地朝下（柏拉圖著，王曉朝譯，2003，527 頁）。」而林肯卻以鑽研《原本》（*Elements*）的首六卷來增強自己充當國會議員的能力（Stillwell, 1989），其中的主要內容就是幾何。

把《原本》的首六卷翻譯成中文的徐光啓，在他的「幾何原本雜議」中，對學習幾何的教育價值作了很有啓發性的論述：

> 下學工夫，有理有事。此書為益，能令學理者袪其浮氣，練其精心；學事者資其定法，發其巧思，故舉世無一人不當學。
>
> 能精此書者，無一事不可精；好學此書者，無一事不可學。
>
> 凡他事，能作者能言之，不能作者亦能言之；獨此書為用，能言者即能作者，若不能作，自是不能言。何故？言時一毫未了，向後不能措一語，何由得妄言之。以故精心此學，不無知言之助。
>
> 人具上資而意理疏莽，即上資無用；人具中材而心思縝密，即中材有用，能通幾何之學，縝密甚矣！
>
> 此書有五不可學：躁心人不可學，麤心人不可學，滿心人不可學，妒心人不可學，傲心人不可學。故學此者不止增才，亦德基也。（徐光啓著，王重民校，1984，76 – 78 頁，節錄）

從上述引文可以看出，徐光啓視學習幾何爲培育品性、細密心思、一般學習能力和辦事能力的有效手段(*)。

對淡化幾何的四點質疑

第一，正當加強幾何訓練已成爲世界各地共同努力的方向的時候（Mammana & Villani, 1998），自稱是國際城市的香港，卻在削弱幾何在高中數學課程中的地位！可以想像，基礎較弱的高中學生一般不會修讀選修單元，剩下來的，縱使對數學有濃厚興趣，在建議中的新高中數學課程內，都沒有多少接觸幾何的機會。到底是我們已找不到可以好好教授幾何的教師，還是幾何真的這樣缺乏吸引力，可以應付的學生都不會選讀？欠缺數

(*) 在徐光啟時代，「幾何」一詞的意思泛指有關數量的學問，不一定專指有關圖形的數學，與今天的用法有異。但由於他的翻譯工作集中於《原本》的首六卷，其中主要內容環繞有關圖形的數學，故有理由相信有關圖形的數學內容（即今天「幾何」的意思）的研習，使他形成引文中的看法。

據，任何答案都沒有說服力。

第二，回想自己唸中學的日子，只要動手畫畫，可以親手發現很多幾何關係。用功的話，甚至可以找到證明。當中獲得的滿足感、成功感，成了努力學習的動力，因爲親自發現和確立數學關係，絕非遙不可及。近年有了動態幾何軟件的輔助，幾何探索更是不費氣力，而且樂趣無窮。相反，在入大學之前所學的微積分，全部都是由老師揭示的，自己只是機械地依樣計算而已。試想有多少修完高中微積分的學生，可以對附錄一的問題，提供令人滿意的解答？退一步說，能搬出附錄二的演算去「證明」圓面積公式的學生或許已在微積分課拿了個甲等成績，又有誰關心這樣做可能等同以餘弦公式證明勾股定理一樣荒謬？以微積分作選修必讀，擠掉幾何，可算是取難不取易（難易只對學生而言，對教師卻又是另一回事），強行剝奪學生創造數學的樂趣。如果取微積分，捨幾何，只是令教師不需要承受與學生一齊發現數學的工作量的措施，方便不稱職的或懶散的教師繼續誤人子弟，我們必須加以譴責。

第三，在四年制大學裏，學微積分的機會絕不缺乏。輔助微積分學習的軟件如 Mathematica™、Maple™ 等，是大學數學的標準教學軟件，但能提供的中學，卻只屬極少數。相反，近年備有動態幾何軟件如 Cabri™、Geometer's Sketchpad™ 等的中學卻與日俱增，學習幾何的設備已不成問題。另一方面，在大學學習平面幾何的機會一般不多，在中學錯過了，恐怕只有自學一途。如果要在「中學修讀平面幾何，大學修讀微積分」和「中學修讀微積分，大學修讀平面幾何」之間作出理智的選擇，答案明顯不過。

第四，也許有人會問，目前的初中數學課程和建議中的新高中數學課程的必修部分，不是已經涵蓋了平面幾何的基礎知識嗎？在新高中數學課程的選修部分加入平面幾何，不是太重疊嗎？單看知識點，整個中學數學課程確實涵蓋了平面幾何的基礎部分。問題在於，這樣的課程布置欠缺了脈絡和全局觀，對學生立論能力的培育也不夠重視。例如，以相似三角形的等價定理，推論中點定理，可算是課程布置的缺陷所衍生的謬誤（陳、黃、蕭，1995）。學生面對學習過程時而直觀，時而實驗，有時又煞有介事地證明一番，最終必弄不清眾多數學結果之間的因果關係，也不知道怎樣才算是確立了的數學結果。一切都在教師或課本的指揮棒下完成，真可謂糊塗到極點。換言之，課程布置很可能令學生得不到上文提及修讀幾何的

多種益處。如果不修補這些必修部分的缺陷，那麼在選修部分加入有系統的、嚴謹的平面幾何訓練，是有必要的。

結語

總結上文的論述，可以發現，認爲中學修讀平面幾何落伍、守舊，只是欠缺視野，昧於形勢的淺見。微積分縱然重要，延至大學才修讀除了有更好的人才和設備的配合，也避過了在高中修讀的生吞活剝，囫圇吞棗，知其言不知其所以言的流弊。當局既已準備經費，爲新高中課程提供教師培訓，理應無需過於憂慮教師的配合。再者，目前有超過二十年教學經驗的資深中學數學教師，不少都曾接受較嚴格的平面幾何訓練，是高中教授幾何的強大後盾。在各方條件配合的情況下，如果我們不讓幾何在高中數學選修單元中佔有合理的比例，實在欠了社會和學生一個交代。

參考資料

柏拉圖著（王曉朝譯，2003）。《拍拉圖全集（第二卷）》。北京：人民教育。

徐光啓著（王重民校，1984）。《徐光啓集》，上下冊。上海：上海古籍。

張僔宙（2005）。中國大陸數學論戰與「呈現數學實質」之我見。《數學教育會議文集》，89 – 96 頁。香港：香港教育學院數學系。

陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1995）。教（學）無止境：數學“學養教師”的成長，載於蕭文強編，《香港數學教育的回顧與前瞻：梁鑑添博士榮休文集》，129 – 137 頁。香港：香港大學。

課程發展議會與香港考試及評核局（2005）。《新高中課程及評估架構建議：數學科（第二次諮詢稿）》。香港：作者。

Calaprice, A. (1996). *The quotable Einstein*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Cnetury: An ICMI Study*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Royal Society (2001). *Teaching and learning geometry 11-19*. Retrieved Aug 12, 2005 from http://www.royalsoc.ac.uk/downloaddoc.asp?id=1196

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history*. New York: Springer-Verlag.

作者電郵：cifung@ied.edu.hk

附錄一

請問應如何理解以下推論和分析？

如果把兩個圖一的圓逐步碎切成全等扇形再拼合（圖二、圖三），得出的圖形將趨近圖四的矩形，從而推得半徑為 r 的圓的面積為 πr^2。按同樣手法，在圖五的半圓的直徑上作全等半圓，且逐步增加其個數（圖六、圖七），那麼，這些全等半圓連成的曲線將趨近圖五的半圓的直徑。

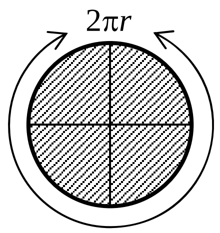

圖　一

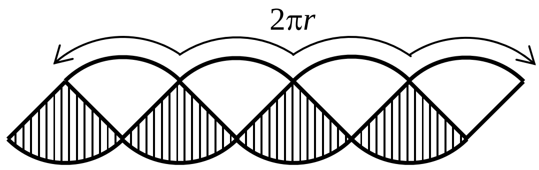

圖　二

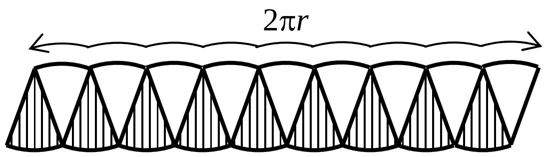

圖　三

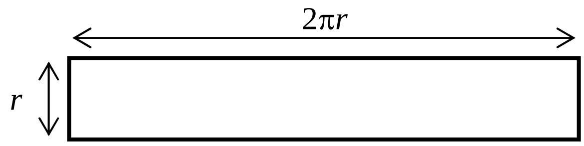

圖　四

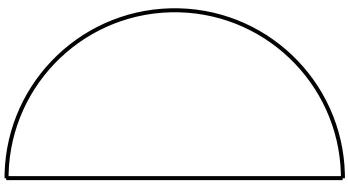

圖　五

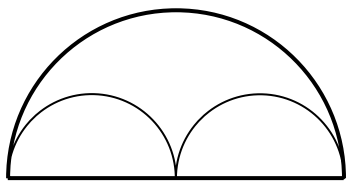

圖　六

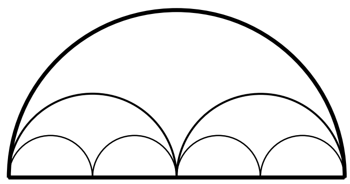

圖　七

由此，可推論

圖五的半圓的弧長 $= \frac{1}{2}\times\pi\times$ 圖五的半圓的直徑

$= \frac{1}{2}\times\pi\times$ 圖六中兩全等半圓的直徑總長

$=$ 全等半圓的總弧長

由於全等半圓連成的曲線將趨近圖五的半圓的直徑，故知

圖五的半圓的弧長 $=$ 圖五的半圓的直徑

即 $\pi = 2$

換言之，接受了半徑爲r的圓的面積爲 πr^2 ，便得一同接受 $\pi = 2$ 呢！既然已知 $\pi \neq 2$，那麼，上面推論圓面積公式的方法也是錯的！

附錄二

圓面積公式的「證明」

利用圓的對稱性可知，半徑爲 r 的圓的面積 A，即圖八陰影部分的面積的 4 倍。

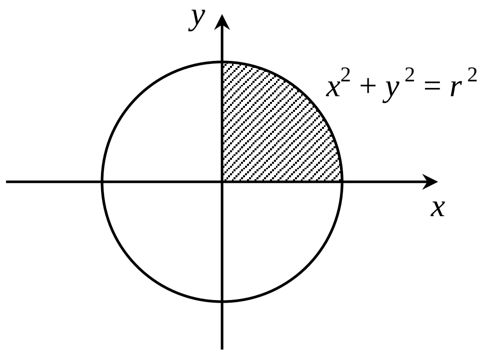

圖　八

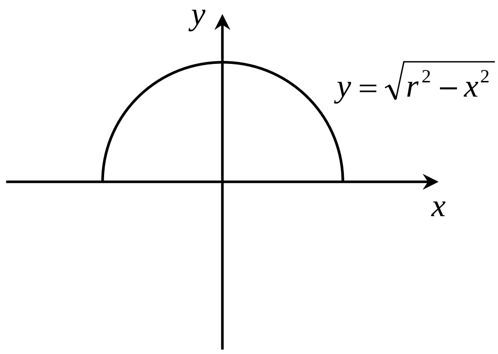

圖　九

因此，透過對圖九函數進行由 0 至 r 的定積分，便可算得

$$
\begin{aligned}
A &= 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x &&= 4\left[x\sqrt{r^2-x^2}\right]_0^r + 4\int_0^r \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^r \frac{r^2-(r^2-x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &&= 4\int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x - 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x - A
\end{aligned}
$$

由此找到

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2r^2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r \\
&= \pi r^2
\end{aligned}
$$