米凱爾點與垂心

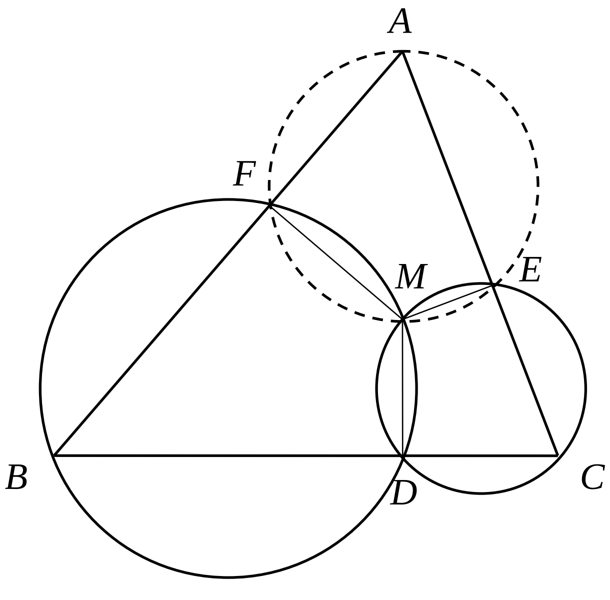
梁子傑
香港道教聯合會青松中學

在高中的課本中，當提到圓的幾何特性時，總會介紹同弓形上圓周角和圓內接四邊形的性質，亦會提到四點共圓的證明方法。但可惜，除了這些簡單的介紹之外，大多數的課本都沒有應用這些定理來作進一步的證明，一來錯過了向學生介紹精彩而有趣數學定理的機會，二來亦不能提起學生對有關內容的興趣。現在讓我爲大家介紹兩個精彩的定理和一個小小的發現，希望可以補充上述的缺憾。

米凱爾點

在許多高中數學教科書中，其實都會引入以下的一個定理作爲書中的一道習題：

定理 1　在 ΔABC 中，若 D、E、F 分別爲三角形三邊 BC、CA、AB 上的任意點，則 ΔAEF、ΔBFD、ΔCDE 的外接圓，三圓共點。



要證明這個定理並不困難，最重要的是先要想通我們應該怎樣做，才

算是證明了三圓共點。在這裏，我們畫出 ΔBFD 和 ΔCDE 的外接圓，並稱兩圓的另一個交點為 M。祇要證明 A、F、M、E 四點共圓，那麼由於 ΔAEF 的外接圓是唯一確定的，因此該圓必定通過 M，定理就得證了。

事實上，由於圓內接四邊形的外角等於其內對角，因此 $\angle MFA = \angle MDB$，並且 $\angle MDB = \angle MEC$，即 $\angle MFA = \angle MEC$。由此得 A、F、M、E 四點共圓。（定理得證）

其實證明A、F、M、E四點共圓的方法不祇一個，但我最喜歡上述的證明。我覺得這個證明快捷又簡單，最巧妙的地方是，彷彿我們並沒有利用過 ΔABC中的任何條件（例如三角形內角和）就已經證明了這定理！另外，定理本身亦非常美麗。留意D、E、F是三角形三邊上任意的點，換句話說，無論我們選擇哪三點作為D、E、F，祇要它們位於三角形三邊之上，那麼有關的三個圓必定共點！更有趣的一件事是，發現這定理的數學家米凱爾（Miquel）是一個不見經傳的人物，我們除了知道他發現這個定理外，對他的生平一無所知！為了紀念這個特別的發現，現在我們稱定理中的交點M為「米凱爾點」。可惜以上資料一般教科書都沒有提及！

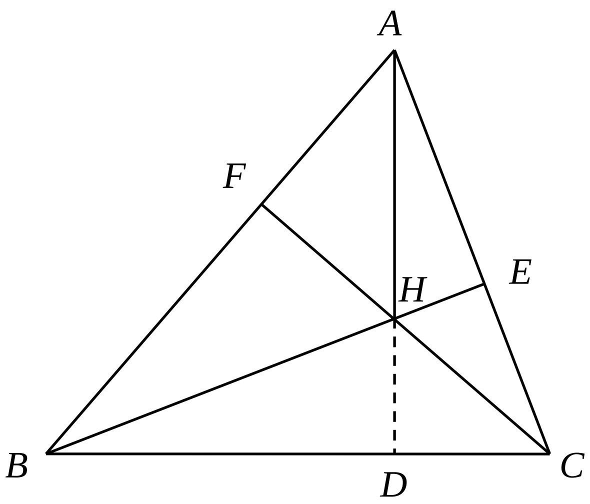
垂心

在 ΔABC 中，若 D、E、F 同樣分別為三角形三邊 BC、CA、AB 上的點，那麼我們知道，除非我們刻意地選擇一些特殊的點，否則直線 AD、BE、CF 不一定會共同相交於一點。而在一些特殊的情況下，例如：上述三線是三角形的中線，又或者是三角形三個角的角平分線，那麼三線共點仍然是有可能的。以下亦有一個關於三線共點的定理：

定理 2　在 ΔABC 中，若 D、E、F 分別為三角形三邊 BC、CA、AB 上的點，使 $AD \perp BC$、$BE \perp CA$、$CF \perp AB$，那麼 AD、BE、CF 三線共點。

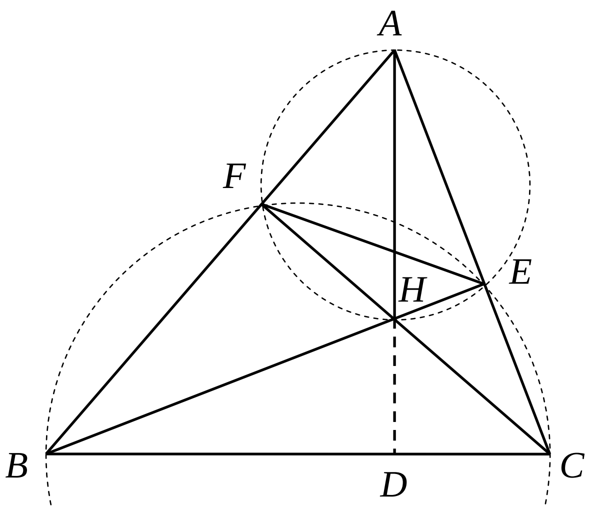
證明這定理的方法有很多，現在祇介紹一個利用共圓性質的方法。

首先，我們在 ΔABC 中繪畫 BE 和 CA 使 $BE \perp CA$ 和 $CF \perp AB$。記 BE 和 CF 的交點為 H。亦記 AH 的延長線交 BC 於 D。在這裏，因為垂直線是唯一確定的，所以定理 2 相當於要求我們證明 $AD \perp BC$，見下圖。



仔細觀察上圖，圖中有很多個角都是直角，例如：$\angle AFH$、$\angle AEH$、$\angle BFC$、$\angle BEC$ 都是直角。我們不禁要問：這些直角會爲我們帶來甚麼好處呢？

原來，這些直角可以讓我們知道，圖中有某些點是共圓的！事實上，由四點共圓的判別法則可知 A、F、H、E 和 B、F、E、C 分別四點共圓。



在圖中加入兩個圓之後，由同弓形圓周角的性質容易得 $\angle EAH = \angle EFH$（即 $\angle EFC$）$= \angle EBC$。另一方面，從 ΔEBC 的內角和可以知道，$\angle EBC + \angle ACB = 90°$，所以 $\angle EAH + \angle ACB$ 亦應等於 $90°$。接著，從 ΔADC 的內角和可以推得 $\angle ADC = 90°$，即 $AD \perp BC$。（定理得證）

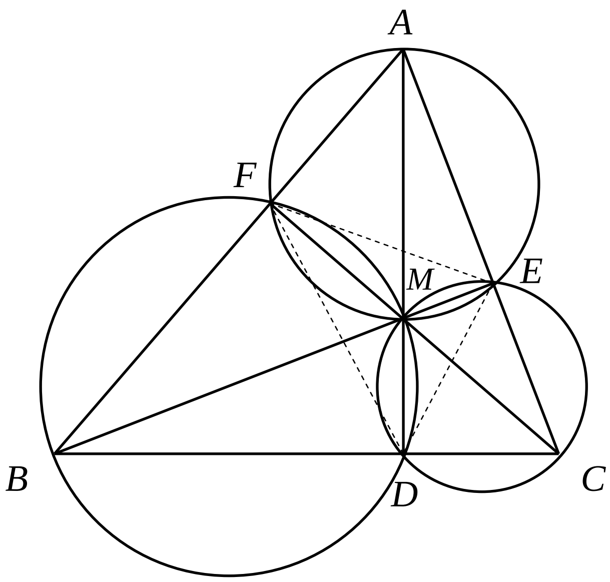
留意：定理 2 其實說明了三角形三條高線共點。我們通常稱三條高線的交點 H 爲「垂心」。

如果大家細仔地看看上面的插圖，亦不難發現，由於 $AD \perp BC$，因此

B、D、H、F 和 C、E、H、D 亦分別有四點共圓的現象！即三角形的垂心同時是一個米凱爾點！換句話說，這個圖不單出現了三圓共點和三線共點的現象，同時三圓和三線的交點亦是相同的！

小小的發現

研究過米凱爾點和垂心之間的關係後，我提出了一個疑問：在甚麼情況下，直線 AD、BE、CF 會共同相交於對應的米凱爾點 M 之上呢？



原來答案很簡單，祇要 M 是三角形的垂心就可以了！具體的定理如下：

定理 3　在 ΔABC 中，D、E、F 分別爲三角形三邊 BC、CA、AB 上的點，M 爲對應的米凱爾點。若 AD、BE、CF 同時相交於 M，那麼 $AD \perp BC$、$BE \perp CA$、$CF \perp AB$，即 M 同時爲三角形的垂心。

這定理並不容易證明，大家不妨先想想，然後才看下面的解釋。

要證明這定理，最重要的思路，就是要充分利用三線共點和同弓形上圓周角的關係。

首先，我注意到，三線共點就可以產生對頂角，因此很容易得到以下結果：

$\angle FDB = \angle FMB$　（同弓形上圓周角）

$= \angle EMC$　（對頂角）

$= \angle EDC$　（同弓形上圓周角）

即 $\angle FDB = \angle EDC$。所以，若要證明 $AD \perp BC$，則要證明 $\angle MDF = \angle MDE$。由於同弓形上圓周角的關係，上述等式亦等同於求證 $\angle MBF = \angle MCE$。

留意：如果 $\angle MBF = \angle MCE$，那麼我們可以知道 B、F、E、C 四點共圓，又或者 $\Delta AEB \sim \Delta AFC$。倒轉說，如果我們可以證明 $\Delta AEB \sim \Delta AFC$，那麼就有 $\angle MBF = \angle MCE$。事實上，我們可以通過以下方法獲得這結果：

由於 $\angle MDF = \angle MBF$（同弓形上圓周角），因此 $\Delta AFD \sim \Delta AMB$。由此得 $AF \times AB = AM \times AD$。類似地，由於 $\angle MDE = \angle MCE$，亦得 $AM \times AD = AE \times AC$。綜合得 $AF \times AB = AE \times AC$。但這可以反過來推得 $\Delta AEB \sim \Delta AFC$（兩邊成比例及夾角相等）及 $\angle ABE = \angle ACF$（相似三角形對應角）。因此得 $\angle MDF = \angle MDE$。

現在我們知道 $\angle ADB = \angle FDB + \angle MDF = \angle EDC + \angle MDE = \angle ADC$。又因為 BDC 成一直線，所以 $\angle ADB = \angle ADC = 90°$，即 $AD \perp BC$。

類似地，我們可以證明 $BE \perp CA$ 及 $CF \perp AB$。（定理得證）

總結

正如本文開始時所提到，在高中的課本中，一般都會提到米凱爾點的問題，可惜就是未有深入討論有關的內容和令學生欣賞到當中美妙的地方。與此同時，在討論「四點共圓」的課節時，一般的教科書都缺少了一些生動有趣的應用題，未能令學生感受到有關課文的重要性和精彩的地方。看過上述有關米凱爾點和垂心的研究之後，我認為如果可以在課堂上和學生深入地討論有關的問題，相信可以升提學生學習「四點共圓」這個課題的興趣。當中亦可和學生重溫相似三角形的性質，實在是一舉兩得。

事實上，我們對米凱爾點的研究並未就此結束，我們可以通過放鬆定理 3 的某些條件，從而引入一些開放性問題給學生討論。例如：如果我們在 CA 和 AB 上任意地找出兩點 E 和 F，那麼我們能否在 BC 上找到一點 D，使 A、M、D 三點共線呢？又，當 A、M、D 三點共線時，D 點的位置是否唯一確定的呢？為甚麼？

參考書目

沈康身著（2004）。《數學的魅力（1）》。上海：上海辭書出版社。

陸乃超、袁小明編著（1999）。《世界數學名題選》。上海：上海教育出版社。

單墫著（2002）。《平面幾何中的小花》。上海：上海教育出版社。