能從頂、棱和面的數目確定多面體的形狀嗎？

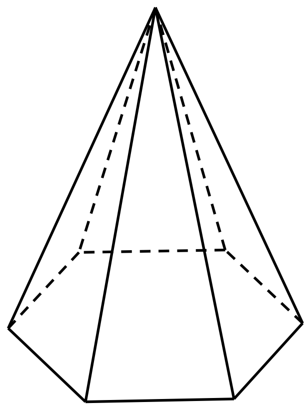
胡韻芝
香港教育學院全日制學生

由一道小學數學考題說起

以下是某小學的數學考試題目：

7 個頂、12 條棱和 7 個面的立體圖形是甚麼？

相信大部份學生都會答六角錐，這顯然是教師心目中的標準答案。但在仔細考究下，原來具備 7 個頂、12 條棱和 7 個面的多面體不只有六角錐一種，還有其他的可能性。



圖一：六角錐

現在舉出幾個滿足上述頂、棱、面數的多面體，它們都不是六角錐！

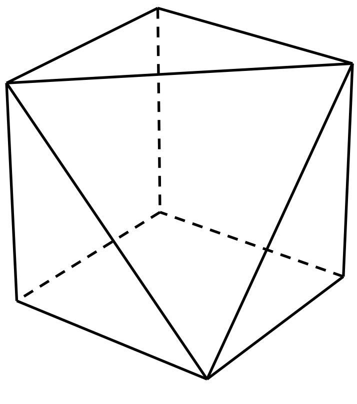


圖　二

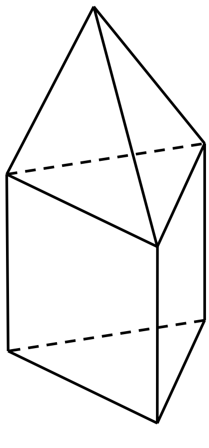


圖　三

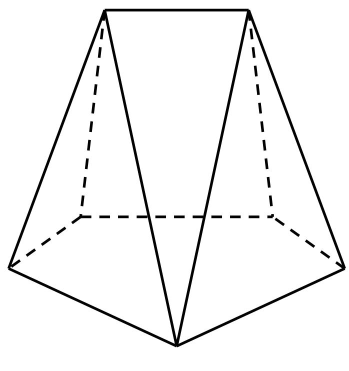


圖　四

上述三個多面體都滿足考題中 7 個頂、12 條棱和 7 個面的條件，可見考題答案絕對不只六角錐一個類別。換言之，答「六角錐」不能算正確，答「不能確定」更應拿個滿分！這問題的提出，源於錯誤地假設了以下命題的真確性：

命題 1　「一個多面體是六角錐當且僅當它的棱數為 12、頂數和面數都是 7。」

從上述例子得知，單從頂、棱和面的數目，一般是不能確定多面體是否屬於一個錐體。

類似的題目亦出現於教材之中，例如《今日互動數學 — 六年級上學期 A 冊》補充課業部份，第五課第 10 題是這樣的：「子聰用竹籤 14 枝和泥膠 8 粒做了一個立體圖形支架，你知道是甚麼立體圖形嗎？（教師用書答案是：七角錐體。）」（教育出版社，2002）由於頂、棱和面數分別是 8、14 和 8 的立體圖形，不只有七角錐一種（圖五就是其中一個例子），這樣的習題只會鼓勵學生揣摩老師意志，置嚴謹辯證於次要地位，不利數學能力的培養。

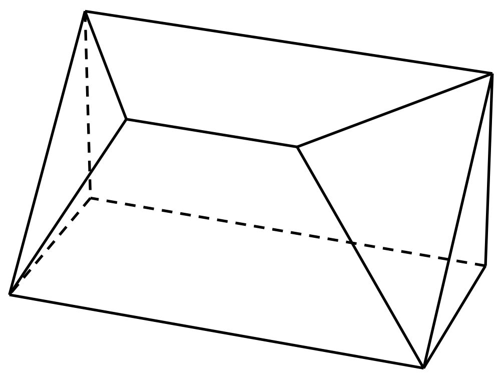


圖　五

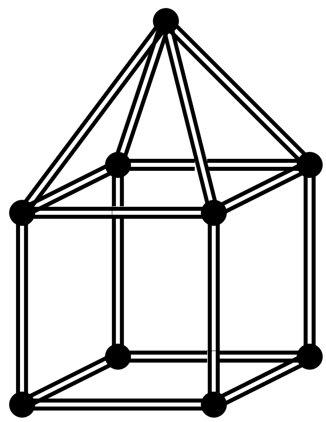


圖　六

有教師也許會辯說，圖二至圖五皆非學生懂得命名的立體圖形。這點倒沒有錯，但總不能讓學生誤以為不懂得命名的立體圖形都不必考慮！如果我們把討論範圍收窄至只包括學生懂得命名的類別（即錐體和柱體），則又不應在同頁第 14 題的答案欄中見到圖六的立體圖形。這樣的習作設計，可算是只許擬題者放火（引用錐體和柱體以外的例子），卻不許答題者點燈（想到錐體和柱體以外的情況）。

另一點值得注意的，是從「已知頂、棱和面的數目，問立體圖形是甚麼」改爲「給出若干竹籤和泥膠，問可架出甚麼立體圖形」的微妙變化。前者棱長可以隨意，後者由實物出發，竹籤的長短對結果是有影響的。例如，圖七正好說明 12 支等長的竹籤，是不能架出六角錐的。雖然給定竹籤和泥膠的數量，表面上只指定了頂數和棱數，對面數並無規範，但是如果確定了多面體的虧格數（genus）[(*)]，面數便隨即確定。

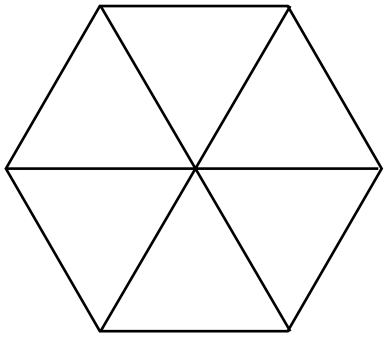


圖　七

在使用教材之前，仔細分析是不可或缺的，否則誤己誤人。

頂數、棱數和面數的疑惑

上述兩個多面體的題目引伸出一個很重要的疑問，「在甚麼情況下，才可從頂、棱和面數來確定多面體的類別？」。爲探討這問題，下文將會舉出不同的例子及證明以作說明。

(1) 錐體和柱體的頂、棱、面數會相同嗎？

爲尋找相同頂、棱和面數的多面體，我們可以嘗試繪圖或製作模型，如上述兩個題目，以試誤方法先構作多個頂數相同的多面體，再逐一配對相同的棱數及面數。但試誤法比較費時，其實我們可先列舉下表來考慮角錐及角柱的頂、棱和面的數目完全相同的可能性。同時間，我們亦能知道若該立體圖形局限於角錐體及角柱體的，是否可以單從頂、棱和面的數目確定類別。

(*) 簡略而言，一個多面體的虧格數是指它含有貫穿整個立體的「隧道」（即穿孔）的數量。歐拉定理指出以下連繫多面體的頂數（v）、棱數（e）和面數（f）的關係：$v-e+f=2-2g$，其中g爲多面體的虧格數。當我們考慮無孔或凸多面體時，$g=0$，便得出常見的$v-e+f=2$，詳細解說可參看江（2003）或Cromwell（1997）。

設 n 及 m 分別為角錐及角柱底面中角的數目，當中 n、m 為大於 2 的整數。

	頂　數	棱　數	面　數
n 角錐	$n+1$	$2n$	$n+1$
m 角柱	$2m$	$3m$	$m+2$

解聯立方程 $\begin{cases} n+1=2m \\ n+1=m+2 \end{cases}$，得出 $m=2$，$n=3$。

由於不存在二角柱，因此角錐和角柱的頂、棱、面數完全相同的情況不會存在。換言之，在作圖配對錐體的頂、棱和面數時，我們不必考慮柱體圖形。同樣地，配對柱體，亦不必考慮錐體。另一方面，若問題局限於角錐及角柱，答案是必能單從角錐或角柱的頂、棱和面數目來確定類別的。

(2)　特殊情況：三角錐

其實，單從頂、棱和面的數目，一般不能確定多面體的類別。然而，在非常特殊的情況下，還是有可能的，三角錐就是其中一個。以下是有關這個特殊情況的推敲。

下列四命題等價：

命題 2　一個多面體是三角錐。

命題 3　一個多面體的頂數為 4。

命題 4　一個多面體的棱數為 6。

命題 5　一個多面體的面數為 4。

現在我們為命題二至五等價作出簡單的推論：

由命題 3 推論命題 2　已知頂數為 4，其中任意 3 個（相異非共線的）頂唯一地定義為一個平面 P，第 4 個頂必在此平面 P 外，否則不構成立體。由於每頂最少連接 3 條棱，故必構成三角錐。

由命題 4 推論命題 3　已知棱數為 6，任何多面體每棱必連接 2 頂，以棱數頂，共 $6 \times 2 = 12$ 次，但每頂最少被數 3 次，故頂數 $\leq \dfrac{12}{3} = 4$，但頂數不足 4 不構成立體，所以確知頂數為 4。

由命題 5 推論命題 4　已知面數為 4，每面最多只能與另外 3 面相鄰，即最多由 3 棱圍成。另一方面，這也是圍成每面的最少棱數。因此，每面均由 3 棱圍成。以面數棱，共 $4 \times 3 = 12$ 次，但每棱被數 2 次，故棱數 $= \dfrac{12}{2} = 6$。

由命題 2 推論命題 5　直接驗得。

以上結果顯示，單由頂數為 4、棱數為 6、面數為 4 的其中之一，已可確定多面體是三角錐。而它是一個非常特殊的情況，只要頂、棱、面數輕微增加，推論已見困難。

<u>(3)　特殊情況：四角錐</u>

四角錐的頂數是 5，但頂數是 5 的多面體卻不一定是四角錐（圖八）；面數是 5 的多面體，除了四角錐，還有三角柱。奇怪的是，棱數為 8 的多面體就只有四角錐！這點可透過以棱數面及以面數棱得知：由於棱數為 8，以棱數面共數 16 次。但每面最少被數 3 次，因此，面數 $\leq \dfrac{16}{3} < 6$。面數為 4 則多面體必為三角錐（棱數為 6），故不可能，剩下面數為 5 一個可能。再以面數棱，即把 16 分成 5 正整數之和，且每項不小於 3（因每面最少由 3 棱圍成）。滿足條件的只有 $3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 16$，即其中一面為四邊形，其餘皆為三角形，這樣的多面體就只有四角錐了。

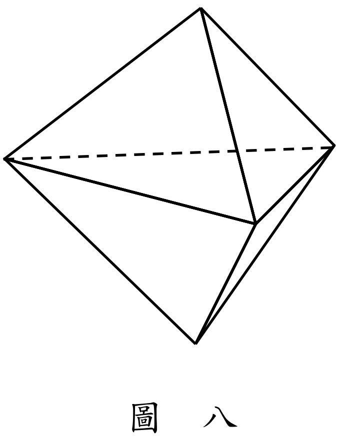


圖　八

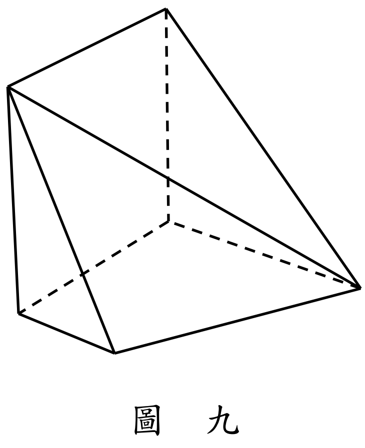


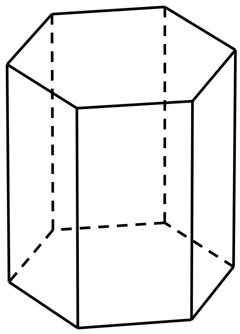
圖　九

五角錐的頂、棱、面數分別是 6、10、6，三角柱與它頂數相同；圖九的多面體與它棱數相同；圖八的多面體與它面數相同。換言之，單考慮頂、棱、面數其中任何一項，都不能確定多面體是五角錐。可以想像，隨著頂、棱、面數的增加，以它們唯一地確定立體圖形類別的前景越見渺茫。前面提到，在六角錐的情況，甚至全用三數均無法確定圖形。

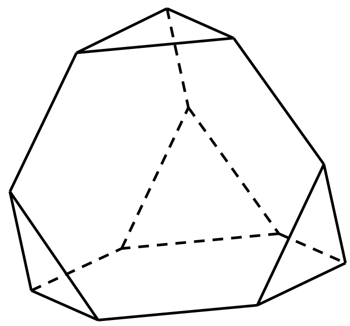
柱體類別的確定

至於柱體，亦同樣不能單從頂、棱及面數來確定類別，以下是其中一個例子。

頂數 = 12　　棱數 = 18　　面數 = 8



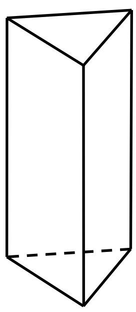
圖十：六角柱



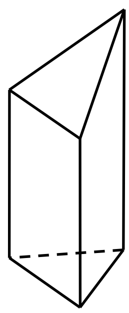
圖十一：截角四面體

由於柱體有兩個平行面而其餘各個面都是四邊形，多面體的棱長是構作平行面最關鍵條件，因此只提供立體的頂、棱及面數，而忽略棱長，將無法確定它爲柱體類別。圖十二及十三正好說明此點，由於圖十三的其中一棱的長度改變，致使上、下底不再平行，破壞了柱體的屬性。因此任何柱體絕不能單從頂、棱及面數來確定類別。

頂數 = 9　　棱數 = 6　　面數 = 5



圖十二：三角柱



圖十三

結語

總括而言，我們只要略爲作圖說明，便直接得出不能單從頂、棱及面數來確定多面體屬柱體類別。這是由於柱體的任一頂點只要被輕微移動，其屬性必遭破壞。這已是柱體不能單從頂、棱及面數來確定的簡潔證明。

反觀錐體，尖頂的輕微移動，不會改變其錐體的屬性。即使是底部頂點的輕微移動，只要不離開錐體的底，其錐體屬性也不會改變。這亦解釋了爲何需要較多的推論及分析，才能確立在某些特殊情況下，可以單從頂、棱及面數來確定多面體屬錐體類別。

本文在香港教育學院數學系講師馮振業博士指導下完成，謹此致謝。

參考書目

教育出版社（2002）。《今日互動數學 — 六年級上學期 A 冊（教師用書）》。香港：教育出版社。

Cromwell, P. R. (1997). Polyhedra. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

江澤涵（2003）。《多面形的歐拉定理和閉曲面的拓撲分類》。香港：智能教育。