最大公因數、最小公倍數要講的是些甚麼？

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

又是老問題：學生學過了這一課，似乎所有相關知識都學過了，所涉及的數題都做過了，但對於整課的來龍去脈還是很陌生。與此同時，這一課牽涉到幾種計算 HCF/LCM 的方法，學生會問，一個就夠了，究竟何以要學這麼多？這就令筆者聯想起一位老師提出並非無的放矢的「究竟有多少種加法？」、「有多少種加法要教？」等疑問。這些求 HCF/LCM 方法間的關係又如何在學生的角度中加以理清呢？

求HCF/LCM的幾種方法

常見的方法有：

短除法

這是比較方便的做法，尤其對於兩個含有較多公因子（這些公因子又比較容易找出的，如不是 23 之類）的數就特別方便。若要說明其背後原理亦不困難。

2	)	120	,	210
3	)	60	,	105
5	)	20	,	35
		4	,	7

圖　一

由於 2、3、5 均是 120 和 210 的公因子，自然 $2 \times 3 \times 5$ 也是 120 和 210 的公共因子，而由於「抽出」這三個公因子得的 4 和 7 再沒公因子，故此 $2 \times 3 \times 5$ 是 120 和 210 的 HCF。

此外，$2 \times 3 \times 5 \times 4 = 120$，$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$，故此 120 和 210 的 LCM 起碼要包含 2、3、5、4 和 7 這些「成分」，而重複的數（即 2、3、5）可省略一次，故此 120 和 210 的 LCM 是 $2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 7$。

但這個方法對於多過兩個數就有些麻煩了，比如 70、30 和 105。若計

HCF 時，我們仍是要設法抽出它們的公因子，今次就只有 5，但 5 × 14 × 6 × 21，決不是 70、30、105 的 LCM，因為 14、6、21 仍有它們的「重疊」部分。若勉強用這個方法，就是只有兩個數有公因子便「抽出」來，得到答案是 5 × 2 × 3 × 7。但有時對著兩個數來抽出、有時對著三個數抽，容易產生混亂，故此，一般超出兩個數都不建議用此法。

```
5 ) 70 ,  30 ,  105
    14 ,   6 ,   21
```

圖二：HCF

```
5 ) 70 ,  30 , 105
2 ) 14 ,   6 ,  21
3 )  7 ,   3 ,  21
7 )  7 ,   1 ,   7
     1 ,   1 ,   1
```

圖三：LCM

所以學生由起初用短除法到將來要轉到質因數分解是需要一個過渡的，我們要讓學生看到為何對於複雜的題目，短除法有其局限（轉用分解法的需要），而在學過分解法後要提醒學生對於超過兩個數，最好不要用短除法。

輾轉相除法

這當然是中國一項偉大發明，對於大的數而又不容易找到公因子的（例如圖四中最小的公因子要到 11，若由 2，3，5 …… 一個一個的試比較麻煩），尤為方便。但它只局限於計算兩個數的 HCF，且在小學階段，其背後原理又不容易說明（更莫說證明了），故此現時一般都不介紹了。

```
3 |  143     187  | 1
  |  132     143  |
  |   11      44  | 4
  |           44  |
```

圖 四

以排列倍數法求LCM

另外一個學生要認識的是以排列各自的倍數去求 LCM。例如求 6 和 10 的 LCM：

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, … …

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, … …

於是 30、60、…… 等均是 6 和 10 的公倍數，而最小的自然是 30。以求取答案而言，這個方法其實是比較費時失事的，尤其對於兩個差距比較大的數：

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, … …

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, … …

（要到第 9 個數才找到！）

不過這個方法能給出很好的圖案表示，我們有許多類似如下的題目，如兩個人同時於同一處出發跑圈，甲 6 分鐘跑一圈、乙 10 分鐘跑一圈，他們何時相遇？甚至以 6 cm 爲半徑的小圓在 10 cm 爲半徑的大圓內滾動（圖六），起始的點 P 何時再回到原本的位置（高中程度）。

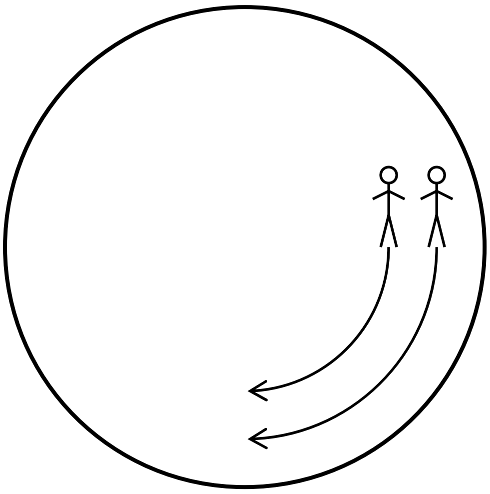

圖　五

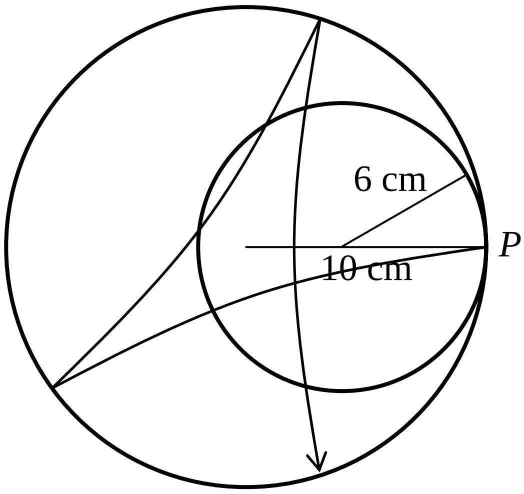

圖　六

此外，我們更可看到，兩數的公倍數都是其 LCM 的倍數。這個結論的證明並不太直接，不妨試試看！（*）

質因數分解法

看來看去，若只以找出 LCM（或 HCF）而言，最有系統的莫過於質因數分解法了。從上面幾個方法的分析，學生應更能接受何以有較便捷的短除法不用，有較圖像化的排列法不用了。

LCM的「前世今生」

筆者在分析課題欲備教學時，總會問：學這個課題會引申到甚麼延續的學習上，而它又承接著甚麼先前學習，才找出它的脈絡。LCM 除了它本身對整數性質的理解外，其直接的應用自然是通分母了。至於它和以往的學習課題的關係，經過上面的分析就昭然若揭了。

爲了有系統的找 LCM，就要將數字作質因數分解，爲了作質因數分解就首先要學習質數。整除測試和按質數次序（2, 3, 5, 7, ……）的整除測試亦在這裏進來。用質因數分解法找 LCM 和短除法亦有一個明顯的過渡，就是如圖七的表示。

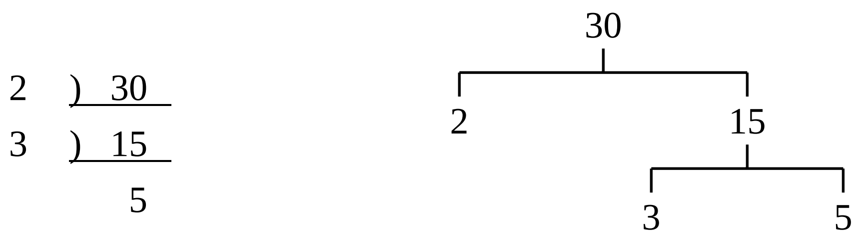

圖　七

筆者以爲，若能設法讓學生清楚個中的脈絡（以上其實貫串了小五的四個課題，佔下學期的三分之一！），學生更能將學到的知識了然於胸。

當然還要注意的是，縱然質因數分解是最簡便的方法，但不表示其他方法沒有學習的價值。例如要對付 6 和 10 的公倍數中，哪個最接近 100，這種題目，就非要動用其他方法不可了。

後記：究竟甚麼是LCM？

要證明上面的（*）是這樣的：

假設 a、b 兩數的 LCM 是 p，而竟然有一個 a 與 b 的公倍數 q 卻不是 p 的倍數，那麼我們將 q 除以 p，得出 $q = pr + s$。

s 既然是餘數，當然小於 p，但又大於 0。如果我們能證明 s 是 a 與 b 的公倍數，那就導致矛盾，換言之，有「q 不是 p 的倍數」的假設不成立。

從上有：$s = q - pr$。既然 q 是 a、b 的公倍數，p 又是 a、b 的公倍數，當然 s 是它們的公倍數（最後一句再需要一些簡單的論証，請大家試試看）。由此，（*）得證。

最近有老師問及 (x^2-1) 與 $(1-x)(x-2)$ 的HCF（gcd）是$x-1$ 還是 $1-x$。似乎一些流行的教科書沒有說清楚，但這問題在高等數學科書中有很清晰的定義。這也和（*）有關。

在（正）整數系統裏，我們可以說，兩數 a、b 的最大公因數是數值上最大的公因數，這亦明顯不過了，但根據（*）的 HCF 版本，HCF 是一個數 d，它既是 a、b 的公因數，而且 a、b 的任意其他公因數也必是 d 的因數。

當問題轉到多項式（polynomial）時，再沒有最大數值可言（當然亦不能比較冪！），所以兩個多項式 p、q 的 gcd 確是如此定義的：

d 是 p、q 的 gcd 當且僅當

1. $d \mid p$ *及* $d \mid q$
2. *若有 d'，使得 $d' \mid p$ 及 $d' \mid q$，必有 $d' \mid d$（而不是數字上的 $d' < d$）*

用這個定義，$1-x$及$x-1$ 兩個都是x^2-1 及 $(1-x)(x-2)$ 的gcd。