從平均的觀念出發推導一元二次方程的求根公式

文耀光
香港教育學院數學系

現時香港坊間的中學數學教科書，有關一元二次方程的求根公式之推導都是千篇一律，多採用如下的方式進行：

設a、b、c為實數，且$a \neq 0$。考慮 $ax^2 + bx + c = 0$，由移項得$ax^2 + bx = -c$。那麼

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad (1)$$

然後在左、右兩邊加上 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 項，得：

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (2)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

所以一元二次方程的求根公式是：$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$。

上述的方法稱為「配方法」(Method of Completing Square)。對某些同學而言，從 (1) 式到 (2) 式忽然在左、右兩邊加上 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 是最感突兀的。其實除了使用「配方法」外，我們亦可以採用如下的方式來進行推導：

設 α、β 為二次方程的根。那麼 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$，即$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$。若把它與 (1) 式對照，可得：$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ 及 $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$。

首先估計 α、β 的值都等於 $-\dfrac{b}{2a}$，然後把它們代入 $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$，得

$\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{c}{a}$，即$b^2=4ac$。因此，若$b^2=4ac$，則根已求得。若$b^2\neq 4ac$，則在估計值加上誤差項$t$。可設 $\alpha=-\dfrac{b}{2a}+t$及 $\beta=-\dfrac{b}{2a}-t$，再代入$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，得$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-t^2=\dfrac{c}{a}$，所以$t=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。因此 α、β 的解爲$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

這種方法的巧妙之處是先從平均的觀念出發，先設根的估值是$-\dfrac{b}{2a}$，然後代入另一方程，看看估值是否有誤差。如果誤差 $t=0$，則解已求得。反之，可以開方求出誤差 t 的值，再解出所求根的真正值。

有關一元二次方程的問題和研究，其實早在古巴比倫的時代已有記載，解法亦與本文介紹的方法相若，有興趣的讀者可參考梁宗巨（2001）或 Burton（1999），也許會對古人解一元二次方程的方法會有更多的體會。

參考書目

梁宗巨（2001）。《世界數學通史》。遼寧：遼寧教育出版社。

Burton, D.M. (1999). *The history of mathematics*: *An introduction*. McGraw-Hill.