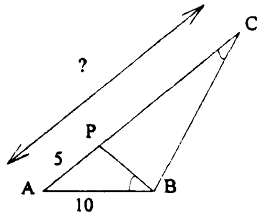
$\Delta ABC \cong \Delta BCA$？(*)

黃毅英

當筆者剛入行教書時，一次於中四班裏，在黑板上計算右圖的一道數題：



$\angle A = \angle A$（同角）

$\angle ABP = \angle ACB$（已知）

$\angle APB = \angle ABC$（三角形內角和）

$\therefore \Delta ABP \sim \Delta ABC$（AAA）

當時有一位留心的同學舉手問我：「老師，你的次序錯了，應寫$\Delta ABC \sim \Delta APB$。」，並說：「中三的老師說，如果寫亂了，是會扣分的！」筆者當時坦然承認，一直(自求學時期到教學時期)沒有留意規定是這般嚴格的，只知算出 $AC = 20$ 就是了。下課後，筆者反覆思考，如果按此規定，ΔABC 就不能與 ΔBCA 全等(甚或相似)了，這不是有點怪怪嗎？

這一類問題其實也甚普遍。1991年，有位老師寫信給香港數理教育學會(見1991年會訊，當時筆者亦有去信回應)，問3:4是否等於¾。要回答這類問題，實可從三個層面去看：

1. 數學工作者是如何處理這類問題的？
2. 在教學時，我們又應如何處理？
3. 在批改時，遇到這類問題，我們又應怎辦？

最近一位小學老師，受其同事之委託，特意到來與筆者交談、問及「蘋果每個3元，2個蘋果共價可寫作3元×2、(3×2)元還是(2×3)元的問題」。這位老師還說這問題已困擾著同事間多年，今年一班老師在「忍無可忍」的情況下、決定委派數位同事、分頭徵詢教育署輔導教學處和不同數學教育工作者的意見。

筆者問她(當然筆者知道一般慣例是寫作3元×2或(3×2)元)，寫作(2×3)元又有何不可？她說這是數法問題。因爲乘法是連加，例如一雞兩腳，三雞則爲(2+2+2)腳，即爲(2×3)腳。筆者說，縱然這麼數的人不多，但我們亦可以先數左腳，後數右腳，變成(3+3)腳，亦即(3×2)腳。

她說，「甲有錢$6，乙有錢是甲的三倍」又如何呢？筆者說，想像某人到賭坊押注$6，結果莊家賠他三倍，由於此人不大會數數，他提出他把$6逐個拿出來，每個掏出的1元，莊家即給出3元，故這種數法便得出(3+3+3+3+3+3)元＝ (3×6)元了。這是取材自Gamow《1,2,3,...無窮大》數無窮集、証明偶整數與整數集等勢的方法。

於數學上，當在「沒有混淆的情況下」(when no ambiguity arises)，我們每每不刻意加以區別。例如雖然$(x+1)^2 \equiv x^2+2x+1$乃為恒等式，在無必要強調其恒等之特性時，往往亦寫作$(x+1)^2 = x^2+2x+1$算了。記得筆者還是一個中學生時，便曾問老師既然有「=」和「≡」的符號以區別方程式和恒等式，為何我們沒有兩個符號以區別待解之不等式和恒眞的不等式(如$(x+1)^2 \geq 0$等)呢？當時他的回答是：當然你可以在有需要時，創造新的符號，但問題在於是否有此必要。若我們並非經常區別待解之不等式和恒眞的不等式，或一看自明，那又是否值得另闢一個新的符號呢？

其實，在數學上，隱含不寫並非少見。最常見的有定義域，宇集或所考慮的範圍。分解 x^3-1 對於中三或中六學生有不同意義。《數學通報》14期(頁31-32)便曾刊出如下一例：眾所周知，$\bigcap_{B\in\phi} B = X$。但其實$\bigcap_{B\in\phi} B = X$是沒有提及X的，X只是所考慮的集(所謂宇集)。故此，若考慮宇集X，我們有$\bigcap_{B\in\phi} B = X$；對於另一宇集Y，我們又有$\bigcap_{B\in\phi} B = Y$。那末，對於任何兩集X、Y，我們豈不總是有$X = \bigcap_{B\in\phi} B = Y$。在這個能產生混淆的情況下，我們或可考慮用$\bigcap_{B\in\phi\subset\wp(X)} B = X$和$\bigcap_{B\in\phi\subset\wp(Y)} B = Y$去加以區別。

至於3:4的問題，大抵亦可依此想法迎刃而解了。嚴格來說，3:4不同於¾，只是若x:y = 3:4則有$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$。同理，以往的解析幾何書亦不把3x + 4y = 1說是直線，只是說3x + 4y = 1 是直線的方程又或$x^2+y^2=1$在坐標平面上顯現作一個圓形。《Curriculum Forum》(課程論壇)二卷二期14-28頁 "The language of sets" 一文亦舉出了一些這樣的例子。

全等三角形依相應次序寫出，其實是種好習慣。在及後計算相應邊長時更能一目了然。

至於教學上，筆者以為，在學生學習之初，著令其遵守一些指定規矩是合情合理的，但若學生隨著學習的加深實宜漸漸增加處理的彈性。就如要求學生在答案下劃上兩條直線一樣，未嘗不可，但過份誇張了，就有點「擾民」。至於高年級同學，就更不必太著緊了吧？就如對數(log)的底也可以省去一樣。於擬題而言，各種格式，佔分太多有喧賓奪主之嫌；而同一學習階段中，既指出乘法的交換性質又強調固定的表達方式，亦未免引起學習上不必要的混淆。有人以學生仍走得顛簸便以大石擋路來形容小事化大的做法。新數學時期亦有人以打斷小腿以便運用枴杖來嘲笑不配合學習者智性發展的形式化。

以上問題每每出自拘泥於單一的「標準」答案，然而一題多解卻往往是增加解難能力的有效途徑 (見《數學傳播》54期71-81頁「解題與數學教育」一文)。以數幾疊硬幣的價值為例，可以一疊疊的數，然後把總數加起來，亦可先數二角的、五角的、一元、二元、然後五元等，再加起來。前者是用了Riemann積分方式計算、後者則用Lebesgue積分(見 Calinger "Classics of Mathematics"，頁764)。總之，容許學生思考方式的彈性、留有多點空間甚為重要。

學生在作答時沒有遵守此類規矩時是否應該扣分則端視事前有否清楚說明這些規矩和擬定一道特定題目之目的了。確言之，該題主要目的是要勘察其他概念還是這些規矩，而這些規矩在這道題目之中是否關乎宏旨。例如在一般情況下，無須次次聲明公式之分母非零，但若要證明向量 $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ 線性相關，則必有一向量寫成其他向量的線性組合，則分母非零起著關鍵作用：

因向量 $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ 線性相關，必有純量 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 非全零使得

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n = 0$$

不失一般性，設 $\lambda_1 \neq 0$，有

$$\underline{x_1}=(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\underline{x}_2+\ldots+(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1})\underline{x}_n$$ 。

於此旁及一件故事。若干年前與數學系老師討論一道高考數學題的給分問題。該題大概是經過一輪計算之後，得出

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}(\frac{1}{n})+\ldots. && (1)\\
=\ &\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(\frac{1}{r}) && (2)\\
=\ &\ln 2 && (3)
\end{aligned}$$

若考生沒有由(1)式簡化至(2)式，一般都不會扣分了，反正(1)式亦有舉出通項。至於(3)式,不少人都覺得 $\ln 2$ 才是最後答案，因爲(2) 不是「閉合形式」(close form)。老師便說，你告訴我甚麼是 $\ln 2$ 呢？它是 $\ln x$ 在2的值。lnx 一般定義作 exp(x) 的逆函數，而 exp(x) 較初等的定義方式是 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{nx}$，反正都是級數。拆穿了，$\ln 2$只是一種代號，概括了「$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{nx}$ 逆函數在2的值」吧了。況且(2)式裡的 $\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(\frac{1}{r})$ 要多準有多準！

無論如何，若因小節未符規矩而失去大部份分數(例如多項選擇題選錯了即無分)，則無論評核在於互相比較還是作爲學習的診斷，似乎都沒有太大的義意吧。

(*)本文(尤以2×3 = 3×2部份)綜合了蕭文強、張百康、莫雅慈、黃家鳴、馮振業、王碧霞諸位在電腦網絡上交流所得的意見，謹此鳴謝！