關於三次多項式函數圖像的一個性質

張覺沖
李求恩紀念中學

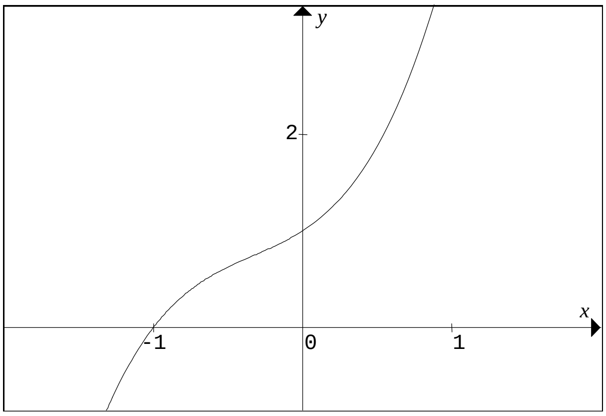
胡逢亮
民生書院

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

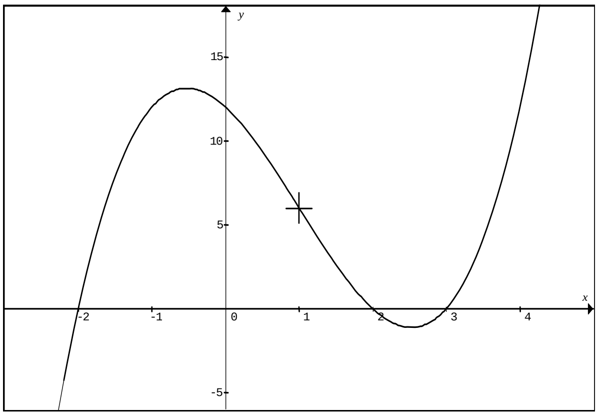
在尋找一個教學示例的過程中，我們意外地發現了一個數學性質。由於我們從未在書本上見過有關的定理，因此我們起初懷疑這性質祇適用於某幾個特殊的情況。但是，當我們利用數學軟件製造出更多的圖像後，我們發覺這性質應該普遍地成立，於是就轉向尋找一個嚴謹的數學證明。當我們確定了證明的方向後，我們很快就寫出了有關的證明。本文就是我們的發現和證明。

性質　任何一個三次多項式函數的圖像，它必定對稱於它的拐點。（The graph of any polynomial function of degree 3 must be symmetric about its point of inflection.）

以下是兩個三次多項式函數的圖像。仔細看看，它們的確對稱於它們自身的拐點！



$y = x^3 + x^2 + x + 1$



$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

證明這性質的方法也很簡單，先找出三次多項式函數拐點的坐標，然

後將坐標軸上的原點移到拐點上，祇要證明在新坐標系統下，該函數會變成單函數（odd function），那麼證明就完成了。

證明　不失一般性，我們可祇考慮函數$y = x^3 + bx^2 + cx + d$。

因爲$y' = 3x^2 + 2bx + c$，$y'' = 6x + 2b$，所以若 (h, k) 爲拐點的坐標，則$h = -\frac{b}{3}$，$k = -(\frac{b}{3})^3 + b(\frac{b}{3})^2 - c(\frac{b}{3}) + d$。

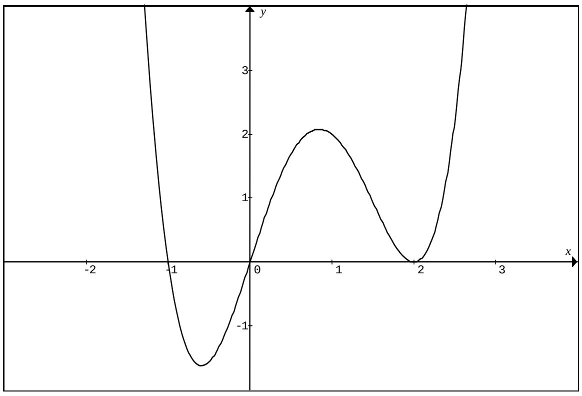
移動原點，即將上式中的 x 代換成 $x + h$，y 代換成 $y + k$，由此得

$$\begin{aligned} y - (\tfrac{b}{3})^3 + b(\tfrac{b}{3})^2 - c(\tfrac{b}{3}) + d &= (x - \tfrac{b}{3})^3 + b(x - \tfrac{b}{3})^2 + c(x - \tfrac{b}{3}) + d \\ y &= x^3 - 3(\tfrac{b}{3})x^2 + 3(\tfrac{b}{3})^2 x + bx^2 - 2(\tfrac{b^2}{3})x + cx \\ &= x^3 + (c - \tfrac{b^2}{3})x \end{aligned}$$

明顯，上述結果是一個單函數，它的圖像必定對稱於原點，亦即是說，原本的三次多項式函數的圖像，它必定對稱於它的拐點。（證完）

我們感到很奇怪，這個有趣而且容易證明的性質，爲何大多數的書本都未有提及？我們相信這個性質應該早已被人發現，祇是由於它的證明跨越了三個不同的課文（導數的應用、坐標的平移和單函數的性質），因此才沒有納入一般的書本之中罷了。

眾所周知，一次多項式函數的圖像是一條直線，它有無窮多條對稱軸和無窮多個對稱點。二次多項式函數的圖像是一條拋物線，它有一條對稱軸。現在我們發現三次多項式函數的圖像有一個對稱點。問題是：這個性質能否推擴到更一般的情況呢？我們試畫過一些四次多項式函數的圖像，可惜並未能找到一個對稱現象。未知在更高次的多項式函數圖像之中，能否有相類似的對稱性質呢？



$y = x^4 - 3x^3 + 4x$