一則關於正多面體祇有五種的簡單證明

潘建強、黃德華
香港教育學院數學系

引言

很多學生和老師都知道正多面體祇有正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體和正二十面體五種[1]。雖然證明的方法有很多，包括利用歐拉公式（$V+F-E=2$）找出每個正多面體的面的邊數和棱數的關係從而推出結論等[2]。可是筆者發覺很多初中老師教授此概念時祇草草地根據課文說一遍便算了，這實在有點可惜。本文嘗試透過一個既簡單又具趣味性的摺立體圖形的活動作開始，從而提供老師教導學生學習正多面體祇有五種的簡單證明方法。

簡單證明

我們先想想以下問題：現有一紙張 $ABCDEF$（圖一），我們希望能將它摺成一個立體圖形的一部分，使 G 成為該部分的頂點。要做到這點，必須將這張紙的一部分（即 ΔDEG）切去（圖二），然後才可把這張紙摺成所需的立體，而且沒有重疊的地方（圖三）。

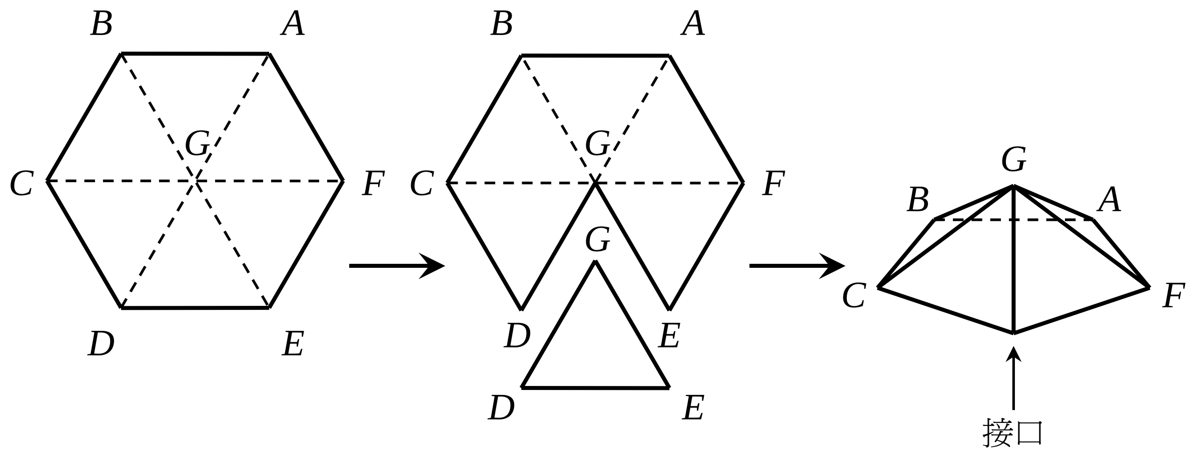

圖　一　　　　圖　二　　　　圖　三

如果將這個問題倒過來說，一個立體圖形的任何一個頂點的四周的面，當它們一塊塊的互相拼接在一起（就好像將這個頂點壓平一樣），都會成為一個有缺口的平面。

1　有關立體圖形與正多面體的定義，請參閱《數學基本原理及應用》，第 157 – 160 頁。

2　有關利用歐拉公式證明正多面體的總數祇有 5 個，請參閱《初等數學概念》，第 102 – 103 頁。

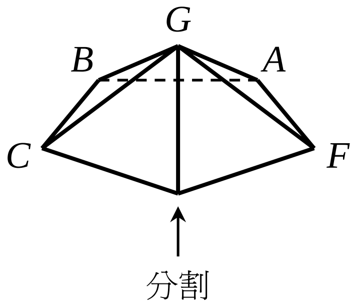

圖 四

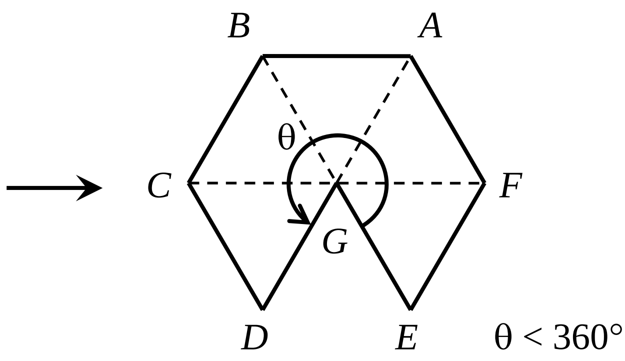

圖 五

故此，這些面在這頂點的內角和必少於 360°。

現在談談有關正多面體。我們先假設某個多面體每一頂點是由 P 個正 n 邊形連接著。

$$\text{正 } n \text{ 邊形的內角} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

由於每個頂點由 P 個正 n 邊形連接，將它們一塊塊地拼在一起，由上述的討論中得出

$$\begin{aligned} P\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) &< 360^\circ \\ P\left(1 - \frac{2}{n}\right) &< 2 \\ nP - 2P &< 2n \\ nP - 2P - 2n + 4 &< 4 \\ \therefore \quad (n-2)(P-2) &< 4 \end{aligned}$$

我們知道 n 和 P 都是大於 2 的整數，所以上式祇有 5 組解：

$$\begin{cases} P = 3 \\ n = 3 \end{cases}, \begin{cases} P = 3 \\ n = 4 \end{cases}, \begin{cases} P = 3 \\ n = 5 \end{cases}, \begin{cases} P = 4 \\ n = 3 \end{cases}, \begin{cases} P = 5 \\ n = 3 \end{cases}。$$

這分別對應著正四、六、十二、八、二十面體，所以正多面體的總數祇有 5 個便得以證出。

參考書目

文耀光、黃德華、盧賢巨（2000）。《數學基本原理及應用》。香港：香港教育圖書公司。

文耀光、梁興強（2003）。《初等數學概念》。香港：香港教育圖書公司。