數學史話：函數概念的演變

傅海倫
山東師範大學數學科學學院
韓群
濱州職業學院

函數概念是數學中最基本、最重要的概念之一，在社會實踐中被廣泛應用。函數概念同其他數學概念一樣，也經歷了萌芽、產生和發展的過程。

函數概念起源於人類的社會實踐，它的樸素思想幾乎是與數學本身同時產生。隨著人們對數的認識不斷提高，形成和發展了變化的量的概念，函數概念也逐漸清晰、明朗起來。比如在已經建立起來的數的運算中，人們發現某些量之間存在一種關係：一個或幾個量的變化，會引起另一個量的變化。同樣，在代數學的方程理論中，人們從代數公式中字母的每一個值求出公式所表示量的值。在運用公式求值中，已經孕育了函數概念的萌芽。

變數與函數的起源不僅與人們對數的認識有關，也與人們對形的認識有著不可分割的聯繫。在解決物體的大小和位置關係問題時，就自覺或不覺地運用了函數關係。比如，在計算圓的面積和周長時，意識到圓的面積和半徑之間，圓周長和半徑之間，都存在著量的依賴關係。又如，三角形當底邊不變，它的面積與高之間存在著量的依賴關係等。當然，這些都是只對相對靜止物體的觀察所得出來的。隨著實踐的不斷發展，當人們開始用運動觀點來考察圖形或曲線時，圖形或曲線可以看作是滿足某種條件的點的軌跡，點運動必須受到某種條件的約束。但函數中變數依賴的思想並沒有明顯地表達出來，函數也不是獨立的研究物件。

函數概念的雛形在中世紀才開始出現在科學文獻中，與解析幾何學的產生有密切關係。在 16 世紀，物體運動的研究已成了自然科學的中心研究課題，實際的需要和各門科學本身的發展使自然科學轉向對運動的研究，對各種變化過程和各種變化著的量之間的依賴關係的研究。到 17 世紀中葉，笛卡兒（Descartes, 1596 – 1650）發表《幾何學》一書，奠定了解析幾何學的基礎，提出變數的概念，引入了函數的思想，並打破了把函數局限於方程的未知數的觀念。解析幾何創立後，動點可用它的坐標 (x, y) 作代數表示，動點受某條件約束，相應的坐標 (x, y) 變化要受某個方程約束。

x 與 y 間通過方程相互依賴，相互制約，從而清楚地揭示了變數之間的相互依存關係。幾何中的函數觀念與代數中的函數觀念獲得統一。

一般認爲，函數（function）一詞首先是由數學家萊布尼茲（Leibniz, 1646 – 1716）在 1692 年提出的。最初，他用函數只表示冪x、x^2、x^3 ……，然後，還用函數表示曲線上點的橫坐標、縱坐標、切線長等與曲線上的點有關係的某些幾何量。

自函數概念提出後，在數學發展的不同階段，人們對函數概念的認識觀點和表示方法都在不斷擴張。

函數概念的第一次擴張主要是解析擴張。數學家約翰 • 伯努利（Johann Bernoulli, 1667 – 1748）在 1718 年給出函數新定義，即：「由任一變數 x 和常數的任意形式所構成的量叫做 x 的函數」。這裏的「任何形式」包括了代數運算式和超越運算式，並用 φx 表示「x 的函數」。約翰的學生、傑出的數學家歐拉（Euler, 1707 – 1783）在其名著《無窮小分析引論》（1748）一書中，把凡是可以給出「解析表示」的，通稱之爲函數。歐拉首先採用符號 $f(x)$ 來表示函數。

函數概念第二次擴張主要是幾何方面的擴張。18 世紀中的另一些數學家發展了萊布尼茲將函數看作幾何量的觀點，而把曲線稱爲函數（因爲解析運算式在幾何上表示爲曲線）。

例如：數學家達朗貝爾（J. Alembert, 1717 – 1783）在研究弦振動問題時，提出了用單獨的解析式給出的曲線是函數的觀點，即把函數定義爲一條曲線。後來歐拉發現有些曲線不一定是由單個解析式給出的，並引起了激烈的爭論。僅從運算式是否「單一」或函數是否連續來區別是否是函數是不合理的。1882 年法國數學家傅立葉（Fourier, 1768 – 1830）提出了任意函數可展開爲三角級數。這實際上是說，不管是連續函數還是不能用解析運算式給出的只能用圖形給出的函數，都可以用三角級數表示。

函數概念的第三次擴張，樸素地反映了函數中的辯證因素，在特定條件下，體現了「自變」到「因變」的生動過程。法國數學家柯西（Cauchy, 1789 – 1857）在 1821 的《解析教程》中給出了函數如下定義：「在某些變數間存在著一定的關係，當一經給定其中某一變數的值，其他變數的值也可隨之確定，則將最初的變數稱爲引數，其他各個變數爲函數。」在這個定義中，函數表達了變數之間的「關係」，而不關注是否用式子來表示，或用一個式子表示，還由多個式子來表示的問題。函數概念與曲線、連續、

解析式等糾纏不清的關係也得以澄清。

函數概念的第四次擴張，使科學函數的定義進入精確化階段。德國數學家狄利克雷（Dirichlet, 1805 – 1859）於 1837 年提出了「對應說」，並給出了函數定義：對 $a \le x \le b$ 之間的每一個 x 值，y 總有完全確定的值與之對應，則 y 是 x 的函數。並非一定要有解析運算式，這個定義抓住了概念的本質屬性，變數 y 稱爲 x 的函數，只須有一個法則存在，使得這個函數定義域中的每一個值，有一個確定的 y 值和它對應即可，不管這個法則是公式、表格還是別的其他形式。這個定義比前面的定義帶有普遍性，爲理論研究和實際應用提供了方便。

狄利克雷還給出了著名的函數 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 爲有理數} \\ 0, & x \text{ 爲無理數} \end{cases}$。$D(x)$ 是極難用簡單的包含引數 x 的解析式表達的，但在狄利克雷的定義下確是一個函數。

函數概念的第五次擴張是在康托爾（Cantor, 1845 – 1918）創立集合論之後，在此基礎上，近世函數定義的產生。

從現代數學觀點來看，函數就是映射。戴德金在 1887 年首先用映射定義函數。現代的高中數學中就是以「法則」（「映射」）來定義函數的。法則，作爲集合 X 到 Y 的一種映射關係。在近代集合論的基礎上，函數的定義確定爲：「設 M 和 N 是兩個集合，f 是一個法則。若對集合 M 中的每個元素 x，由法則 f 總有集合 N 中的確定元素 y 與之對應，則稱 f 爲定義在集合 M 上的一個函數」。這個定義一掃原來定義中關於「對應」的含義存在著的模糊性，也克服了以前函數定義中的各種局限性，使得函數概念更爲清晰、正確，因而被廣泛應用於數學的各個分支及其他學科之中。

綜上所述，函數概念經過了五次擴張，最後才真正建立了清晰、準確、完美的函數定義，從而結束了長達 200 多年的爭論不休。

我國對函數一詞的使用是從清代數學家李善蘭開始的，他在《代數學》譯本（1859）中，把 “function” 譯爲「函數」，「凡式中有天，爲天之函數」，我國古代以天、地、人、物表示未知數 x、y、z、w，所以這個函數定義相當於：若一式中含有 x，則稱爲關於 x 的函數。「函」有包含的意思（我國古代「函」與「含」可以通用），這正是李善蘭用「函數」一詞翻譯 “function” 的原因。