培養學生數學檢驗和反思能力的教學案例

江雪萍
華南師範大學數學系
羅碎海
華南師範大學附屬中學

「注重提高學生的數學思維能力」是普通高中《數學課程標準》的基本理念之一，其中「數學檢驗和反思」是在學習和運用數學解決問題時必不可少的步驟，是學生數學思維能力的具體體現。因此，培養學生的數學檢驗和反思能力對提高學生的數學思維能力有著積極作用。

所謂數學檢驗和反思，就是選擇恰當的方法檢查數學學習的過程和結果，用自己的語言闡述所學的數學知識，分析定理或公式等成立的條件、適用的範圍，探討某種解題方法的理論依據，思考如何發現和解決問題，思索學習過程的成敗得失及其原因、應該吸取的教訓、經歷的情感體驗等等。通過總結和反思學習或解決問題的過程、策略，可以調整解決問題策略，繞過難點，尋找新的思路，以及對問題或得到結論進行引申、推廣，從而優化解題方法和策略，不斷提高數學思維能力。

筆者在實際教學中發現，學生數學檢驗和反思意識比較薄弱，而且缺乏有效的檢驗和反思方法。如何在教學中培養學生的檢驗和反思能力呢？筆者結合三角函數教學中的一些案例，說明學生檢驗和反思意識的現狀，並探討培養學生檢驗和反思能力的策略。

一、加強學生對數學題目的閱讀能力，掌握一些常用的檢驗方法

從學生的作業中發現，對於課本上的一些習題，很多學生沒有仔細閱讀，就匆忙做題，結果出現了明顯的錯誤卻視而不見，沒有重新思考的意識，更不會用一些方法檢驗所得結果

案例 1　在直徑爲 30 cm 的圓中，一扇形的弧含有 54°，求這個扇形的周長

與面積（π 取 3.14，計算結果保留兩個有效數字）。

作業反映的情況：

① 大約 30 %（全班 60 人）的學生把「直徑」看成「半徑」，

② 在計算弧長時，角度與弧度的互化出錯：$54° = \dfrac{180}{\pi} \times 54$，

③ 在計算面積時，角度與弧度混用：$S = \dfrac{1}{2} r \ell = \dfrac{1}{2} \times 54 \times \dfrac{9}{2} \pi$，

④ 大約 40 % 的學生沒有注意題目中括弧裏的說明，祇求出扇形的周長爲 44.13 cm，面積爲 105.975 cm^2，而題目要求保留兩個有效數字。

如果學生有反思和檢驗的意識，對題目認真閱讀，仔細審題，並重新審視一下自己的整個解題過程，以上的錯誤是可以發現並糾正的，並在以後的數學學習中盡量避免類似的錯誤。因此，筆者引導學生掌握以下幾種檢驗方法：

一 通過對問題結果的符號、範圍、大小、關係等進行估計（估算檢驗）；

二 檢查運算過程以及所求值的單位是否符合（量綱檢驗）；

三 考證是否類似問題有類似的結論（類比檢驗）；

四 從結果出發逆向運算能否還原，結果是否符合題意（反向檢驗）；

五 通過其他方法檢驗是否結論一致（另解檢驗）；

六 是否能舉出反例推翻原有的結論（反例檢驗）；

七 檢驗所得到一般結論的幾個特例，是否與一般情況時結論相同（特例檢驗）……

通過學習和運用這些檢驗方法，學生不斷提高數學檢驗的意識，學會進行數學檢驗，而且數學思維能力得到提高。

二、通過逐步設問，不斷提高學生對問題的反思能力

案例 2　已知 $\sin\alpha = 2\cos\alpha$，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$。

以下是一位學生在黑板上的板書過程，〔 〕裏的內容是學生演示過程時口述的同步思維解釋。

解　$\because \begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$　〔因為有兩個未知數，那麼由已知條件和三角函數的基本關係式聯立方程組可以解出〕

$\therefore \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$　〔由方程組解出兩組解〕

當 α 為第一象限角時，$\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha = 2$。

當 α 為第三象限角時，$\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha = 2$。

〔由兩組解的符號分別判斷 α 角的位置，然後分別求出 $\tan\alpha$ 的值〕

1. 對該題的解題方法提出設問

T（教師）：對於這道題目，大家看看這位同學的解題過程和同步思維過程，發表一下自己的意見。

S_1：結果和我的一樣，這種方法是對的。

T：結果相同，方法就對嗎？有沒有別的方法？

S_2：我不是那樣做的，雖然我的結果也一樣。（以下是這位同學的解題過程及同步思維解釋）

解　$\because$　$\sin\alpha = 2\cos\alpha$，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 > 0$

$\therefore$　α 是第一或第三象限角〔先由已知條件得出正切值為正數，從而確定 α 的象限〕

由 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \sin\alpha=2\cos\alpha\end{cases}$ 得到 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$〔由方程組消去一個未知數〕

當 α 是第一象限角時，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

當 α 是第三象限角時，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$〔根據 α 的象限確定三角函數值的符號，從而求出對應的三角函數值〕

S_3：我明白了，兩種方法一開始是不同的，板書中先求出兩組 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值，然後根據所求的值來分象限討論；剛才那位同學是先由已知條件確定象限，然後再根據象限來求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值。

S_4：對，對，第二種方法是先定象限再求值。

T： 很好，看來大家已經看出兩種方法的異同，都是利用平方關係和已知條件，通過方程組來求解，差別在於何時定象限，就這道題而言，兩種方法都是對的。

2. 對該題解題策略的適用性和問題的推廣提出設問

T： 大家回過頭想想，通過解出的 $\sin\alpha$ 、$\cos\alpha$ 具體數值來確定角 α 的象限，或先通過 $\tan\alpha$ 的具體值來確定 α 所在的象限。如果把題目的條件變形，例如已知 $\sin\alpha=m\cos\alpha$，這些想法還行得通嗎？

（一些學生按照板書的方法，得到 $\sin^2\alpha=\dfrac{m^2}{1+m^2}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+m^2}$；還有一些學生先求出 $\tan\alpha=m$，然後對 m 進行分類討論，再對 α 所在象限討論 ……）

S_5：老師，直接開方求出 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 行嗎？要不要對參數 m 進行分類討論？

T： 三角函數值由象限確定符號，開方有正負，怎麼判斷在哪個象限取何值？

S_6：老師，我由$\tan \alpha = m$討論m的符號，然後對四個象限進行討論，要討論七、八種情況，有辦法不進行那麼多討論嗎？討論最煩了，總是會漏掉一些情況。

T：對於含有字母的題目，不一定一開始就要分類討論，而是先根據已知條件往下做，做到有很多條路卻不知道走那一條時才討論的。對於這道題目，已知 $\sin \alpha = m \cos \alpha$，就要從算術過渡到代數的層次。

S_8：怎麼用代數的方法，甚麼地方要討論呢？不用對m分類了嗎？

T：三角函數中，角的終邊不僅落在某個象限內，還可能落在坐標軸上，所以先討論角的終邊在坐標軸上的情況，即$m = 0$ 時；$m \neq 0$ 時，由方程組 $\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin \alpha = m \cos \alpha \end{cases}$ 得到$\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1+m^2}$，我們依據式子去思考，要開方就有正負，這該怎麼辦？

（一些學生先根據 $\cos \alpha$ 的符號分一、四和二、三象限兩種情況討論，然後求 $\sin \alpha$ 時又分一、二和三、四象限討論 ……）

T：大家的思維很敏捷，但是按照兩種不同的標準對同一個問題分類，大家會不會覺得彆扭呢？再想想甚麼地方拐彎了？代數比算術到底有甚麼好處？

S_5：我知道了，不用因爲有字母而再對求$\sin \alpha$ 分象限討論了，因爲字母已經把符號包含了！

T：很精彩！對代數有所領悟。祇需要對 $\cos\alpha$ 分象限討論就行了。

當 α 爲第一、四象限角時，$\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，$\sin\alpha = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$。

當 α 爲第二、三象限角時，$\cos \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，$\sin\alpha = -\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$。

在教學中，通過逐步設問，引導學生對自己的想法進行思考，看看想到的方法是否合適題目的特點和要求，得到的結論是否在自己大致的估計

範圍內，有沒有可能對方法或結論進行推廣，或者是否有更好的方法，逐漸調整解決問題的策略，不斷提高數學反思和檢驗的能力。

三、創設情境讓學生充分表達自己的數學思維

案例 3　求證 $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)$。（注：高一數學必修本 p.39 例 5）

上課時，筆者先讓學生自己證明，在巡視中發現全班 60 人中，95 % 的同學採取從右邊證到左邊的方法，簡單直觀：由正弦和角公式展開 $2\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha) = 2(\sin\alpha + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$ 即可證得。學生將書上的證明（證明：左邊 $= 2(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 2(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha) = 2\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)$，即從左邊證到右邊，引進了一個輔助角 $\frac{\pi}{6}$），對照自己的證明後，發表了意見和看法：

S_1：我認爲用我的方法較簡單，書上的方法較複雜，沒有想到過這種方法。

S_2：就這道題而言，我覺得我的方法好，很直接，書上的方法太難了。

S_3：雖然我沒有想到書上的方法，但我比較欣賞書上的方法，它比較有價值，因爲以後遇到比較複雜的題目，可以學著用書上的方法，可能會簡單點、容易些。

T：大家有自己的看法，但是對於一種方法，不在於簡單還是繁瑣，而在於這種方法的價值，既然書上的這種方法難，請問難在哪裏？

S_3：那個「2」怎麼得來的？還有那個「$\frac{\pi}{6}$」怎麼確定？

（一陣沈默，大家在對這個問題進行思考 ……）

S_4：那個「2」是前面的係數的平方和再開方，

S_5：畢氏定理，$2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$，

S_3：$\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 分別是 $\dfrac{\pi}{6}$ 的正弦和餘弦，

T：很好，大家找到這種解法的根源了。觀察等式左右兩邊，爲甚麼要從左邊證到右邊？到底書上的證明方法有甚麼好處？

S_6：左邊有餘弦（cos）和正弦（sin），右邊祇有正弦（sin），

S_7：把兩種三角函數名化成一種三角函數名。

T：對！非常好！這就是書上的證明方法的價值所在。那麼，以後大家遇到類似的問題，也要多考慮各種解題方法的價值，提高自己的反思能力。

教學中創設適當有效的情境，讓學生有機會充分表達自己的數學思維，即對數學問題情境、所蘊涵的數學思想、使用的數學解題方法等提出自己的看法，通過交流，培養學生對自身數學思維的反思、檢驗能力，這樣可以不斷提高學生數學學習的積極性、參與性和有效性。

感謝導師王林全教授的指導！

參考文獻

[1] 人民教育出版社中學數學室（2003）。《全日制普通高中數學》（必修）第一冊（下）。北京：人民教育出版社。

[2] 章建躍（2003）。《中學生數學學科自我監控能力》。上海：華東師範大學出版社。

[3] 王林全（2002）。問題解決的有關心理活動及其思考。《數學教育學報》，第 11 卷，第 1 期，頁 36 – 38。

[4] 董毅（2003）。檢驗數學結果常用方法及其合情推理模式。《數學通報》第 1 期，頁 39 – 40。