EduMath 19 (12/2004)

# 用例題自學

宋瑾瑜、曾蔚茵、王燕燕
福建中學

蕭寧波
香港中文大學教育心理系

中小學的數學很大部份都可以透過觀察例題來學習。隨便翻開一本教科書，每一個課題都會有一些演算好的例子。老師一般也會把一些例題演算給學生看，一邊配合口頭講解，如果學生有不明白的地方，老師便會詳細解說，之後便會給予學生一些練習題，讓學生嘗試將例題示範的方法用來解決新的問題，以確定學生是否學會了，之後便再給學生多些練習題，以鞏固學生的學習，和促進學習遷移（即將所學得的用來解決新的問題）。

利用例題來學習數學，很多地方也有採用。有些跨文化的研究指出，多用例題學習數學的學生，例如日本學生，相對一些不著重例題教學的國家的學生，例如美國學生，數學的成績比較好（Stigler & Hiebert, 1999）。例題亦不單止對學習數學有幫助，研究還發現人們要解決一般的問題時喜歡參考一些已經做好的例子（例如：LeFevre & Dixon, 1986; Piroli & Anderson, 1985）。

雖然老師一般都會口頭講解例子，但這不是必須的。Zhu 和 Simon（1987）讓一些學生閱讀一些一元二次多項式的因式分解例題，學生要自行從例題中找出分解因式的方法，結果證實雖然學生起初會感到困難，但大部份最後都能夠從例題中自己學會。這結果是很重要的，因爲現代教育講求「學會學習」，重視學生的自學能力。從例題學習不失爲一種重要的自學途徑。

Mayer（2003）指出，數學科的例題包括三個部份：一、問題；二、解決方法（通常是一連串步驟）；三、一些解釋。要從例題中學習解決問題的方法，並不能只靠單純的模仿，而是要學生通過考察一系列的具體事例，從中歸納出能夠解釋這些事例的抽象知識（即是基模 schema，蕭，2002）。在示例學習中，一定數量的例子和問題可以幫助學生抽取問題的關鍵特徵

和解題操作，有效的例題學習需要學生建構答案的基模（solution schema），這樣學生才能把解決問題的方法應用在新的問題。Cooper 和 Sweller（1987）比較了用例題學習與發現式學習的效果，結果顯示前者較佳，對學習遷移的幫助尤其大。他們認爲這是由於前者把解決問題的方法展示出來，相對於發現式學習法要求學生自己發現答案，對工作記憶的負荷較低（Sweller, 1999），讓學生有較多認知資源去建構答案的基模。

學生除了需要掌握例題所示範的解難步驟之外，還需要理解這個解難步驟可以解決的問題類型（即是建構該問題類型的基模知識），才能夠恰當地把這個解難步驟應用在新的問題上（Kalyuga, Chandler, Tuovinen, & Sweller, 2001）。Holyoak 和 Koh（1987）發現，妨礙學習遷移的一個主要因素是人們遇到新問題時，沒有想起自己曾經見過類似的例題。所以，學生要有效地從例題學習，需要理解問題和它的答案的結構重點，和二者之間的關係。

儘管人們能夠從例題學習，但不等如例題學習一定會成功。Atkinson, Derry, Renkl, & Worthham（2000）回顧了自八十年代以來有關例題學習的研究，整理出各項影響例題學習成敗的因素，當中包括例題本身的特點、例題與例題之間的安排、與及學習者處理例題的方法，可見從例題學習不是一個簡單的過程，需要幾方面的因素配合才能成功。所以，若要在課堂上實踐例題學習，便要探究如何在群體的學習環境裡把這些因素適當地配合起來。

## 「例題學習」的行動研究

我們這次研究是探討怎樣利用例題，讓學生在課堂上自學數學，由於目的是研究學生自學，所以老師盡量不講解，如果學生對例題有不明白的地方，便要自行思考。研究是在一間程度中上的中學裡的中二班上進行，所以學生的學習環境與平日的沒有分別。課堂上的群體學習環境，當然不比實驗室的控制得好，但真實性高，所以今次研究的結果應該有很高的現實意義。

我們採用的理論架構來自 Newell 和 Simon（例如： Newell & Simon, 1972; Newell, 1973）與及 Anderson（1983）。根據他們的理論，例題所展示的、也就是學生需要學習的、用以解決問題的知識，可以被表徵爲一系

列的「產生法則」（production rules）。所謂的「產生法則」，就是「條件 — 動作」或「條件 — 結論」。而「產生法則」的解釋的規則是：如果條件部分得到滿足，就執行相應的動作（或得到相應的結論）。學生是被要求透過「考察」例題，從而獲取解決問題的一些產生法則，然後將那些產生法則的應用範圍擴大，使他們能解決更多問題、和更快地解決問題。

另一方面，Ausubel（1968）的有意義學習理論和 Gagné（1985）的學習條件論指出，有效的學習需要學生將已有的知識與新知識結合起來。根據這些理論，我們認爲學生能夠從例題學習，除了例題本身的因素之外，學生自己亦需要先具備一些知識，他們要把這些已有知識與例題提供的資料結合起來，才能夠理解例題，然後建構解決問題的產生法則。啓動學生的已有知識是一般教學常常採用的程序，我們認爲利用例題學習時也不應忽略。

我們採取行動研究的方法。本文首三位作者是同一所中學的老師，他們在第四作者的指導下，在任教的班內進行研究。三人共同準備研究所需的材料，課堂教學由首位作者執行，其他兩位負責觀察學生，在必要時提供協助。完成第一次試教後作出檢討，經修訂後再執行第二次試教，之後再作回顧式的檢討。

我們教授的課題是一元二次多項式的因式分解，學習目標是掌握形式如$x^2 + qx + r$（其中$x$是變數，而$q$和$r$是整數常數，可以是正數也可以是負數）多項式的因式分解。研究在初中二年級的兩個班內進行，兩個班的學生數學水平相若，人數約爲四十。第一個班採用舊版本的學習材料，由於老師的經驗不足及內容的編排不當，根據我們的觀察，學生的學習效果及動機較直接教學更差。總結了第一次的失敗經驗，第二班的教學內容及舖排作了很大的改動，這次的效果比第一次的有很大改善。我們主要匯報第二次的情況，並比較第一次與第二次的分別。

## 「例題學習」的實踐

以下是這次研究的匯報。我們把解決這類問題的知識描述爲三條產生法則，這些規則可以歸納如下：

基本產生法則：

如果目標是分解因式$x^2 + qx + r$，那麼

(1) 找出兩個數 $a$ 和 $b$，使 $a \times b = r$ 及 $a + b = q$；

(2) 分解的結果為$x^2 + qx + r = (x + a)(x + b)$。

符號產生法則（一）：

如果目標是分解因式$x^2 + qx + r$，其中$q$和$r$均為正數，那麼分解出的因式中，$a$和$b$都是正數。

符號產生法則（二）：

如果目標是分解因式$x^2 + qx + r$，其中$q$為負數，$r$為正數，那麼分解出的因式中，$a$和$b$都是負數。

我們製作的教材由三部分組成：

(1) 先備知識的再啟動：

由兩組填充題組成，使學生回憶有關的先備知識。

(2) 新知識的學習：

由例題及課堂練習組成，要求學生通過觀察例題和做課堂練習進行學習。

(3) 評估測試：

檢查學生是否已經掌握所學的知識內容，它會從兩個方面進行檢查：

(1) 要求學生解決有關因式分解的問題，

(2) 要求學生歸納所學的規則。

## 第一部分：先備知識的再啟動

例題 1：$x^2 + 3x + 2$ 中，$x^2$為二次項，$3x$為一次項，2 為常數項。

練習 1：

(a) $x^2 + 5x + 6$ 中，$x^2$為________，$5x$為________，6 為________。

(b) $x^2 + 6x + 8$ 中，$x^2$為________，$6x$為________，8 為________。

例題 2：展開多項式 $(x + 1)(x + 2)$。

解：$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 \times 1 = x^2 + (2x + x) + 2 = x^2 + 3x + 2$

練習 2：

(a) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + \_\_\_\_x + \_\_\_\_x + 2 \times 3 = x^2 + \_\_\_\_x + 6$

(b) $(x+3)(x+4) =$ ______________________ = _______________

多項式的乘法

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 \times 1 = x^2 + (2x + x) + 2 = x^2 + 3x + 2$$

因式分解

$x^2 + 5x + 6 = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

$x^2 + 7x + 12 = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

例題 3：6 可以分解爲 $1 \times 6$、$2 \times 3$、$(-1) \times (-6)$、$(-2) \times (-3)$。

練習 3：8 可以分解爲__________________________________________。

例題 4：6 可以分解爲兩個數 2 和 3 的積，這兩個數的和是 5。

練習 4：

(a) 6 也可分解成兩個整數____和____的積，這兩個數的和是______。

(b) 8 可以分解成兩個整數____和____的積，這兩個數的和是______。

(c) 8 也可以分解成兩個整數____和____的積，這兩個數的和是______。

## 第二部分：新知識的學習

例題 5：

(a) $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

（共有五題，因篇幅關係，其他省略）

練習 5：

(a) $x^2 + 6x + 8 = (x +$ ____$)(x +$ ____$)$

（共有五題，因篇幅關係，其他省略）

例題 6：

(a) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

（共有四題，因篇幅關係，其他省略）

習題 6：

(a) $x^2 - 6x + 8 = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$
（共有六題，因篇幅關係，其他省略）

## 第三部分：評估測試

1. 把下列各一元二次多項式分解爲因式。

   (a) $x^2 + 4x + 3 =$ ________________________________________
   （共有五題，因篇幅關係，其他省略）

   (f)* $10 - 7c + c^2 =$ ________________________________________
   （共有四題，因篇幅關係，其他省略）

   （有 * 者爲挑戰題）

2. 填空：

   (a) 把形如$x^2 + qx + r$的一元二次多項式分解爲因式。
   先把$x^2$分解成 _____ ，把常數項分解成 _____ 個因數的 _____（積／和／商／差），這 ____ 個因數的 _____（積／和／商／差）恰好等於 ____________________。

   (b) 如果常數項是正數，

   (i) 一次項的係數是正數，那麼要把常數項分解成兩個 ______（正／負）的因數。

   (ii) 一次項的係數是負數，那麼要把常數項分解成兩個 ______（正／負）的因數。

我們要求一部份學生在閱讀例題時口述他們的思考（think aloud），他們的口語報告幫助我們更清楚地了解他們的學習過程。以下是一些有代表性的口語擇錄：

例題 5：

(a) $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

這題在例題 2 中出現過，常數項 $2 = 1 \times 2$，一次項的係數 $3 = 1 + 2$。所以$x^2 + 3x + 2$ 就可以寫成 $(x + 1)$ 及 $(x + 2)$ 的乘積。

(b) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

前面的例題提過 6 可以分解為兩個數 2 和 3 的積，而這兩個數的和是

5。這就是說常數項 $6 = 2 \times 3$，一次項的係數 $5 = 2 + 3$。把這兩個數加上 $x$，因此 $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$。

(d) $x^2 + 9x + 8 = (x + 1)(x + 8)$

常數項 $8 = 1 \times 8$ 或 $2 \times 4$，不過 $2 + 4 = 6$，祇有 $1 + 8 = 9$ 才等於一次項的係數。把 1 和 8 各自加上 $x$，因此 $x^2 + 9x + 8 = (x + 1)(x + 8)$。

例題 6：

(b) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

這個例題與 5(b) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ 差不多，只是一次項的係數是 $-5$ 而不是 5。前面的例子提到 6 可以分解為 $1 \times 6$、$2 \times 3$、$(-1) \times (-6)$、$(-2) \times (-3)$，除了正正得正外，負負也可以得正，但是它們的和也要是負數的話，就只有兩個都是負數才可以，$(-2) + (-3) = -5$。
所以 $x^2 - 5x + 6 = [x + (-2)]\ [x + (-3)] = (x - 2)(x - 3)$。

從學生的口語我們可以看到，學生閱讀例題時，能夠從已學過的多項式乘法法則中，推想出我們希望他們學習的基本產生法則的「行動」應滿足的兩個「條件」，即常數項的兩個因數之和如果剛好等於一次項的係數的話，這個多項式就可以被因式分解。開始的時候，學生得到的解只符合兩個條件中的一個，當發現自己的錯誤後他就得到同時符合兩個條件正確的解。這樣學生就獲得了一個完整的基本產生法則。這方面，我們的學生跟 Zhu 和 Simon（1987）的受試者的表現相類似。

如上文所說，我們是先在另一個初中二年級的班內進行首次例題學習活動，雖然兩班學生的數學水平相若，但因爲第一個班採用舊版本的學習資料有不足之處，加上老師的經驗不足及內容的編排不當，學生的學習效果及動機較直接教學更差。

第二班的教學內容及舖排作了很大的改動（即上文所述的學習資料），教學效果有了很大的改善。以下我們把新舊版本學習資料作出比較，嘗試找出導致第二次例題學習得以成功的因素。

| | 舊版本 | 新版本 |
|---|---|---|
| 重溫先備知識 | 1. 先備知識的回憶部分，一開始重溫因式分解的概念及多項式乘法與因式分解之間的關係，概念以言語陳述的方式呈現，學生感到非常抽象及難以理解。 | 1. 同樣的概念及關係以圖形的方式呈現，直接了當，減低學生工作記憶產生的負荷。<br>多項式的乘法<br>$(x+1)(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 \times 1 = x^2 + (2x + x) + 2 = x^2 + 3x + 2$<br>因式分解 |
| | 2. 在溫習一元二次多項式各項名稱時，學生可能只是機械的模仿，並不能觀察出例一及例二之間鋪排的關係。 | 2. 將次序對調，先介紹甚麼是一元二次多項式，然後才引出一元二次多項式的因式分解，符合學生的認知進程。 |
| 新知識的學習 | 1. 通過例題引出多項式乘法及因式分解關係時，例題設計未能對學生將來的學習提供適當的提示，令他們從例題中歸納知識出現困難。在新知識的學習時，很多學生在研究$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ 一例時，都不能發現 2 和 3 是 6 的因數，且他們的和是 5，剛好等於一次項的係數。 | 1. 例 2 $(x+1)(x+2)$<br>$= x^2 + 2x + x + 2 \times 1 = x^2 + (2x + x) + 2 = x^2 + 3x + 2$<br>設計此例題時，刻意將學生原來已熟悉的乘法運算步驟詳盡化，目的引導學生在以後的觀察中可以發現常數項的 2 可以分解 1 和 2 的積，而這兩個數的和又剛好等於一次項的係數。<br>例 5 的第一題又刻意安排爲$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$，希望學生可以通過例 2 的回顧發現規則，然後再從餘下的例題中得到驗證，從而幫助他們形成產生法則。 |

| | 舊版本 | 新版本 |
|---|---|---|
| | 2. 練習題的數目太多，先備知識的回憶及新知識的學習二部分中的示例包含了太多的信息資源（要學生在未熟悉示例學習的情況下，一次過完成一個基本產生法則規則及四個符號產生法則）。學習資料，篇幅冗長，學生未能進行理想的心理整合，往往做了後面，忘了前面，看不到彼此之間的聯繫，即使完成了全部的練習，仍未可以正確的解決評估測試中的問題。 | 2. 將原本的練習題數目減半，盡量將有關的學習內容在同一版內呈現，方便學生遇到困難時可以由上文下理中得到提示。小步子的設計和即時的反饋增加了學生的學習信心。並能將本階段獲取的知識應用於下階段的學習中。 |
| 評估測驗的題目 | 評估測驗的題目未能照顧學生的差異，題型變化死板，學生缺乏挑戰。 | 加入難度較高的題型，滿足數學能力較高學生的需要，令學生產生適當的學習遷移。 |

## 「例題學習」的教學反思

在我們的教學的過程中，我們發現例題學習需留意以下幾點：

首先，學生學習例題時，需要具備一定的知識，學生要把已有的知識與例題提供的資料結合起來，才能夠建構新的知識。當然，學生之間知識水平會有不同，為了照顧不同學生，老師適宜先與學生回顧他們曾經學過的有關知識。正如我們這次研究的做法，先給予學生一些溫習題，懂得的學生可以很快做完，不懂的可有多一次機會學習，或者找老師幫忙。這樣做可以增加例題學習的成功機會。

其次，在講授以「例題 + 問題 + 小結」的形式組成的教材時，每一個例題演練單元中，應首先給予學生觀察有解答的例題，通過讓學生自我解釋形成一些初步的假設；然後在解決問題的過程中逐步驗證和修改這些假設，最後通過小結發現和歸納新知識。如果老師講解例題，應將學生的注意力引向新的知識，將同種類型的一系列問題連續呈現於學生面前（Atkinson et al., 2000），在小結中引導學生對新知識進行概括，促使學生理解知識時由具體經驗的水平（如：某例題）過渡至抽象概括的水平（例如：基模）。

再者，應該盡量減輕學生學習例題時的認知負荷（cognitive load），認知負荷的增加，不僅會延長解決問題的時間，並且會限制學生從問題解決的過程中獲取新的知識。根據 Sweller（1979），認知負荷的多少，取決於一段時間內，認知系統需要把多少資訊單位組織起來：資訊單位越多，認知負荷便越重；資訊單位之間本來的組織越鬆散，要把它們組織起來的認知負荷便越重。因此應盡量在每個例題演練單元集中教一條產生法則；對錯誤的答案提供即時反饋；並以適當的方式呈現例題和問題。

此外，應照顧學生之間的學習差異，在設計教材時應確保絕大部分學生不必進行過多的探索就能夠獲得正確的產生法則；對有困難的學生，除了可以在教師的指導下理解課題中的難點，也可以通過參考答案歸納及理解所學的知識。在評估測試中，除設計符合教學目標的基本題目外，也應

專門為程度較高的學生設計對新學的知識加深理解和靈活應用的題目。本研究中某些題目以「*」標明，中等程度以下的學生可以跳過這些題目。當然，我們也鼓勵其他學生嘗試解答這些題目來檢驗自己的程度，希望可以藉此激勵他們的學習動機。

第五，例題學習並不是將學習的所有責任都完全地交給學生，老師的存在同樣重要。如果老師未能在學生出現困難時及時地提供針對性的輔導，學生就會被學習過程中遇到的困難所挫敗，並可能會因此而失去學習興趣。但同時，如果所提供的輔導沒有質素，則只會浪費雙方的時間。

最後，有的學生學習了例題之後卻不能解決與例題稍有變化的問題。如評估測驗中的 $10 - 7c + c^2$一題，就令不少學生出現困難，其實只要將多項式按照$c$的降冪再排列的話，所有的問題就迎刃而解了。要促進問題解決技能的遷移，需要提高例題之間的變化（Atkinson et al., 2000）。

## 結論

香港的教育改革正進行得如火如荼，教改提倡「學會學習」，要求老師多著重於培養學生的觀察、思維、表達等各種能力，所以傳統的老師「教」，學生「學」的直接教學方式若不改變，我們便不可以恰當地引導學生積極地投入學習活動中。但關於「學會學習」的討論，一直流於口號式的階段，沒有實在的提議。針對這情況，本研究設計了側重認知過程的例題學習法，目的是希望透過以學生為主導者，老師為引導者的課堂教學形式來培養學生的自學能力。

## 參考書目

Anderson, J. (1983). *The architecture of cognition*. Cambridge, MA: Harvard.

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Worthham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, *70*, 181 – 214.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A cognitive view.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Cooper, G., & Sweller, J. (1987). The effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology, 79,* 347 – 362.

Gagné, R. M. (1985). *The conditions of learning* (4th ed.). New York: Holt, Rinehart & Winston.

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, *15*, 332 – 340.

Kalyuga, S., Chandler, P., Tuovinen, J., & Sweller, J. (2001). When problem solving is superior to studying worked examples. *Journal of Educational Psychology, 93*, 579 – 588.

LeFevre, J., & Dixon, P. (1986). Do written instructions need examples? *Cognition & Instruction*, *3*, 1 – 30.

Mayer, R. E. (2003). *Learning and instruction*. Upper Saddle River, NJ: Merrill-Prentice Hall.

Newell, A. (1973). Production systems: Models of control structures. In W. G. Chase (ed.), *Visual information processing*. New York: Academic Press.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Ormrod, J. E. (2003). *Educational Psychology: Developing Learners*, 4th Edition. Upper Saddle River, NJ: Merrill-Prentice Hall.

Pirolli, P. L., & Anderson, J. R. (1985). The role of learning from examples in acquisition of recursive programming skills. *Canadian Journal of Psychology, 39*,240 – 272.

Stigler, J.. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

Stringer, E. T. (1996). *Action Research*. Thousand Oaks, CA: SAGE.

Sweller, J. (1999). *Instructional design in technical areas*. Camberwell, Australia: ACER Press.

Zhu, X., & Simon, H.A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, 4, 137 – 166.

蕭寧波 (2002)。用基模啓發思考。《教育學報》，第 30 期，頁 31 – 40。