

探索如何令能力稍遜的學生掌握二項式的因式分解

陳夢熊

中華聖潔會靈風中學

引言

I. 課改重視學習經歷及學習成果

近年本港大力提倡的課程改革都圍繞著如何發展學生的九大共通能力（包括合作技能、傳意能力、創造力、思考方法、資訊科技技能、數理能力、問題解決能力、自我管理能力和研究技能）以及五項高階思維能力（解決問題能力、探究能力、推理能力、傳意能力和構思能力）；在 2001 年新數學科課程範圍中，明顯已把它的重點放在培養這些技能上。可是，大家也認同這些共通能力和高思維技能是非規律化和複雜的，而且他們與數學是不可分隔的。通過學習數學，我們期盼下一代除了有一定的數學知識及能力應付生活所需外，還能從數學學習的過程中獲取上述的一般共通能力，幫助他們迎接現今知識建構的時代，並為終身學習奠下了重要的基礎。那麼，怎樣的課堂活動有利發展學生上述的能力呢？教師又應該如何去設計課堂活動使「學甚麼」和「怎樣學」得以平衡呢？

II. 學生學習差異

由 2002 年起，教統局將學生的學習水平的差異由原來的五個組別縮減至三個組別，在新的政策安排下，大部分的學校學生間的差異擴闊了，無可避免，有些班級裡學生的學習差異真的很大。我所任教的中三級兩班學生，他們的數學能力很參差，我看見有好些同學，只有中一級水平，在課堂教學中，實在需要花很多氣力及心思來照顧學生的個別學習差異。可是，順得哥情失嫂意，我仍收到一些學生的訴求，能力較高的要求教快一點點、學深一點點，而能力稍遜的一群則目瞪口呆，吃不消，若他們一跟不上，就會自動放棄，找周公去也。我明白這現象在普及教育下是無可避免，即使在發達國家如美國、澳洲等國也是屢見不鮮的。但有甚麼可行的教學策略可關顧不同學習需要呢？

III. 剪裁課程的效用

在新的 2001 年數學科課程綱要中有提及照顧學習差異的政策，除鼓勵

用適切課堂活動外，教統局將學習內容分成「基礎部分」、「非基礎部分」和「增潤項目」(香港課稅發展議會，1999，頁 2)，讓教師按不同數學能力的學生進行因材施教。但剪裁課程卻是一件高難度的工作，因剪裁不宜會導致日後學習其他課題的困難，必須小心處理銜接問題，否則恐怕今天解決問題的方法或許變成明天另一個更大的問題。當然，教統局這種安排確實是為教師提供一條出路，使教師能按學生現況設計校本課程，照顧個別學習差異。然而，將難學的課題刪去，學得少真的就能提升學習效能嗎？

IV. 教學策略

我有些朋友，他們本著愛心，為了照顧個別學習差異而不得不刪剪課程，但將課程剪裁至支離破碎，卻使一些能力較佳的學生不能完整地認識整個學習階段數學的全貌，這亦使優秀的學生對數學失去興趣。我也明白針沒有兩頭利，但我卻對這種照顧個別學習差異的措施有所保留。我們過於偏重用「學甚麼」來幫助弱勢學生學好數學，卻忽略了「怎樣學」的重要性。要面對教育普及化的挑戰，現今的主流教育理念不再是以教師為中心，而是以學習者為中心，教師的主要功能是創造一個合適的學習環境或學習文化，讓學生們能從中建構知識。學生在參與討論數學問題的過程中，學習各種高階思維能力包括猜測、尋找規律、預計、猜想、測試、假設、推論和驗證等 (Frobisher, 1994)。然而，在課堂中教師的角色跟傳統角色大有不同，教師成爲了誘動者、給予能力者、啓發者、聆聽者、發問者、評估者和觀察者等 (Pirie, 1987)。

我能否以這種新思維重組課程，運用合適的教學策略，深入淺出，以簡馭繁，讓每一個學生都學到呢？

V. 小組討論

在學校裡，小組討論是一種十分普遍的課堂活動，有越來越多人認爲協作式的學習應該成爲課堂教學的主導。在課堂活動中，一項好的任務能抓緊學生的好奇心，並令他們思索和繼續堅持學習 (Good et al., 1992)。在活動的過程中，學生之間的討論能夠提升和刺激他們思考，將學生分組使每組有不同能力的學生，更能達至預期的學習效果。若教師能將學習課題設計成合乎中度的問題，使小組目標明確。若能鼓勵學生分享彼此的想法和策略，以達成一個共同的結果或任務，我想這類的活動能包容同學間能力的差異、不同的背景、學習模式和個人興趣，它能促進學習的果效，我

認為合作式學習的好處能照顧個別學習差異的需要。

觀察及反思

I. 學習因式分解的歷程

在第三個學習階段（初中年級）中，學生將會在數和代數範疇裡學習到「簡易多項式的因式分解」的概念和技巧，需時約 15 個課節，整個課題的關鍵概念是要讓學生理解因式分解是展開代數式的逆運算和利用提取因式及拼項法分解因式，最後目標是學習利用十字相乘法分解二次多項式的因式。明顯地學生在學習這單元時已對展開多項式（即分配律）應有一定的認識，學生能從展開多項式的概念建構出多項式因式分解的概念和技巧。但學習利用十字相乘法分解二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 為因式時，傳統典型的方法是將 a 和 c 分別寫作兩對因子，利用相乘法檢定該兩對因子是否合適。當 a 和 c 的因子數目不多時，學生一般能夠分解二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 為因式，即 $ax^2 + bx + c = (px + q)(mx + n)$ ，這個課題的學習節數需要約五堂。

II. 困局

由於學生要有很高的運算及分析能力才能分解二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 為因式，我發現能力稍遜的學生處理 $a = 1$ 時（即 $x^2 + bx + c$ ）尚可跟上，但當處理 $a \neq 1$ 時，大多行人止步，即使學懂了這種方法的同學，他們也很快便忘記了。究竟問題出在何處呢？有沒有其他方法讓學生學好這個課題呢？應怎樣使能力稍遜的學生也能學好這個課題呢？

當我反思這個課題所涉及的概念及技巧時，我發現學生只停留在「因式分解是展開代數式的逆運算」的概念上，卻無法串聯之前所熟練的技巧「利用提取因式及拼項法分解因式」。這就是用十字相乘法技巧來處理二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 的因式分解的斷層地方，特別是對能力稍遜的學生造成人為的學習障礙。

當我向同事提出上述觀點時，他們也感到震撼！他們對用「十字相乘法」作二次多項式因式分解深信不疑，他們以前也是這樣學，也跨越過種種難題，自然就理直氣壯，責怪現今學生水平每況愈下，不能應付這類優美的數學思維。但當我們仔細分析「十字相乘法」所涉及的技巧，發覺真的有別於利用「提取因式及拼項法分解因式」的方法，學生無法從過去的已有經驗或技巧從中建構新知識。對思路敏捷的同學，較易克服「十字相

乘法」當中所涉繁複的變化，然而，對數學能力稍遜的同學來說這的確是較難跨越的一大步。故此，朋友們的意見加強了我的信念，能否找出另一種方法讓學生更有效學懂這課題呢？

課堂研究

I. 教得少，學得多

針對上述困局，我引入一種有別於利用十字相乘法分解二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 為因式，新方法重視從已有的概念「理解因式分解是展開代數式的逆運算」和技巧「利用提取因式及拼項法分解因式」，讓學生運用尋找規律並自行建構方法去分解二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 為因式。

當展開 $(px + q)(mx + n) = pmx^2 + (pn + qm)x + qn$ ，我發現了其中有一些規律，就是中間兩項的係數之積與首尾兩項的係數之積相同。於是乎新方法就先將多項式 $ax^2 + bx + c$ 中的 bx 項分解為 $tx + sx$ ，其中 $st = ac$ ，使 $ax^2 + bx + c = ax^2 + tx + sx + c = (px + q)(mx + n)$ 。

在整個因式分解的過程中學生只需具備尋找規律的解難能力、提取因式及拼項法分解因式等基本技巧，就能作二次項因式分解了。

II. 教案設計

學習目標：用兩堂時間讓學生學曉分解二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 為因式

課堂環境：分組

對象：中三學生

工具：工作紙（見附錄）

第一堂：

1. 關鍵概念

(a) 運用簡易拼項及提取因式的方法因式分解 $ax^2 + bx + c = (px + q)(mx + n)$

(b) 找出上述可作因式分解的四項式係數數字間的規律

2. 教學策略

利用小組協作形式進行，課堂中段接近全班學生各組可自行發現上述規律。對能力高的同學可邀請他們自行創作一些可被因式分解的四項式 $ax^2 + tx + sx + c$ ，並說明理由。

第二堂：

1. 關鍵概念

利用尋找規律的解難技巧將 $ax^2 + bx + c$ 寫成 $ax^2 + tx + sx + c$ ，從而將二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 分解為因式： $ax^2 + bx + c = ax^2 + tx + sx + c = (px + q)(mx + n)$ 。

2. 教學策略

聯繫上一節可作因式分解的四項式係數數字間的規律，判斷何時 $ax^2 + tx + sx + c$ 能被因式分解。

觀察及反思

今年我教兩班中三數學，兩班學生數學水平屬第二組別，我選擇了中三其中一班學生用了兩堂時間探索這種新方法，另一班則沿用舊法，卻用了六堂時間。我雖然只用兩堂，但發現大部分同學都能掌握二次項因式分解的方法的竅門，他們亦能夠清楚說出哪些二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 能作因式分解，新方法簡單易明，整個因式分解只涉及四個步驟，每一步的目標明確，因此，學生一般能發現自己的錯處並自行更正。

19. (a) 因式分解 $4x^2 - 11x + 6$ (4分)

$$= 4x^2 - 11x + 6 = (4x-3)(x-2) //$$

$$= 4x^2 - 3x - 8x + 6$$

$$= x(4x-3) - 2(4x-3)$$

(b) 因式分解 $-x^2 + 5x - 6$ (4分)

$$= -x^2 + 5x - 6 = -(x+6)(x+1) //$$

$$= -x^2 + 6x - x - 6$$

$$= -x(x+6) - (x+6)$$

學生 A：對卷時，學生即時知道 $6(-1) \neq (-1)(-6)$ ，並能更正為 $5x = 2x + 3x$ 。

19. (a) 因式分解 $4x^2 - 11x + 6$ (4分)

$$4x^2 - 11x + 6$$

$$= 4x^2 - 8x - 3x + 6$$

$$= 4x(x-2) - 3(x-2)$$

$$= (4x-3)(x-2)$$

(b) 因式分解 $-x^2 + 5x - 6$ (4分)

$$-x^2 + 5x - 6$$

$$= -x^2 + 6x + 1x - 6$$

$$= -x^2 + x + 6x - 6$$

$$= -x(x-1) + 6(x-1)$$

$$= (-x+6)(x-1)$$

學生 B：對卷時，學生即時知道 $6x + x \neq 5x$ ，並能更正為 $5x = 2x + 3x$ 。

結果分析

在上學期考試中考了兩題因式分解二次多項式 $4x^2 - 11x + 6$ 和 $-x^2 + 5x - 6$ ，每題 4 分。比較兩班學生的成績如下：

	3B (新方法)		3E (舊方法)	
	平均分	標準差	平均分	標準差
不及格的同學 (少於 5 分)	2.53 (其中有 6 個 0 分)	2.57	1.2 (其中有 11 個 0 分)	2.37
及格的同學 (多於 5 分)	5.52	2.56	6.61	2.50
全班	4.4	2.90	4.8	3.61

從上述的數據，我發現了一些有趣的結果。

1. 兩班考試表現不佳的同學（不及格的同學），他們在這課題上都表現得不理想，或許顯示這課題對我們學生來說是較抽象和深奧。
2. 比較兩班數學能力較弱的學生，用新方法學習因式分解二次多項式較舊方法明顯有效，這方法有助能力較弱的學生學這課題。
3. 比較兩班數學能力較佳的學生，用新方法學習因式分解二次多項式較舊方法略為遜色，其中原因或許新方法涉及較多步驟，特別在涉及抽負數因子時容易犯錯。
4. 整體而言，用新舊兩種方法學習因式分解二次項式，兩班學生的平均

分數分別不大，但新方法的標準差明顯較小，顯示新方法能有效縮減學生的個別學習差異。

回顧學生的學習經歷

當我與用新方法學習二次項因式分解的同學，他們很用易及有自信地用自己的語言表述新方法的原理和技巧，他們明顯指出新方法不需要死記招式。於是乎我重新用一堂時間對未能掌握「十字相乘法」的同學教授此技巧，我發現約有七成這類學生都明瞭新方法的觀念，及能夠對二次項式作因式分解，學生的轉變及能從中重燃對數學的興趣帶給我很大的滿足感。

結論

在普及教育下，學生的學習差異無可避免擴大，教師的專業在於能不斷反思，並因不同學生能力表現更新教學策略，達到照顧個別學習差異。筆者嘗試以另類方法，啟發學生運用尋找規律的能力、聯繫提取因式和拼項法分解因式等基本技巧，導出因式分解二次項式 $ax^2 + bx + c$ 的方法，新方法有效地使能力稍遜的學生更易理解和掌握二次項式 $ax^2 + bx + c$ 的因式分解。

新方法是要將多項式 $ax^2 + bx + c$ 中的 bx 項分解為 $tx + sx$ ，其中關鍵概念是 $st = ac$ ，使 $ax^2 + bx + c = ax^2 + tx + sx + c = (px + q)(mx + n)$ 。

對一些未能掌握「十字相乘法」的同學教授此技巧，他們大都明瞭新方法的觀念，及能夠對二次項式作因式分解。看見學生的轉變及促使他們重燃對數學的興趣帶給我很大的滿足，「教得少，學得多」成為我不斷提升教學的內在動力。

參考書目

1. Frobisher, L. (1994). Problems, Investigations and an Investigative Approach, In A. Orton & G. Wain, (Eds.) *Issues in Teaching Mathematics*, London: Cassell.
2. Pirie, S. (1987) *Mathematical Investigations in Your Classroom*, Basingstoke: Macmillan.
3. Good T.L. et al., (1992). Investigating Work Groups to Promote Problem Solving in Mathematics, In J. Brophy (Ed.) *Advances in Research on Teaching*, Vol. 3, JAI Press, 115 – 160.
4. 香港課稅發展議會 (1999)。《中學數學科課程綱要：數學科(中一至中五)》。香港：政府印務局。

附錄

工作紙一（第一堂）

1. 因式分解下列各式：

(a) $x^2 + 2x + 4x + 8$

(c) $x^2 - 3x + 4x - 12$

(b) $x^2 + 3x + 5x + 15$

(d) $x^2 - 2x - 5x + 10$

2. 因式分解下列各式：

(a) $2x^2 + 5x + 2x + 5$

(c) $3x^2 - 6x + 2x - 4$

(b) $2x^2 + x + 6x + 3$

(d) $4x^2 - 2x - 6x + 3$

3. 試找出下列各組數字間的共同規律：

(a) 1, 2, 4, 8

(e) 2, 5, 2, 5

(b) 1, 3, 5, 15

(f) 2, 1, 6, 3

(c) 1, -3, 4, -12

(g) 3, -6, 2, -4

(d) 1, -2, -5, 10

(h) 4, -2, -6, 3

工作紙二（第二堂）

1. 試觀察下列代數式中各項係數，判別下列哪些代數式可作因式分解。

(a) $x^2 - 8x + 4x - 12$

(d) $3x^2 - 2x - 6x + 4$

(b) $x^2 - 2x + 5x - 10$

(e) $2x^2 - 6x + 2x - 4$

(c) $2x^2 - 5x + 2x + 5$

(f) $4x^2 - 2x - 10x + 5$

2. 因式分解下列各式：

(a) $x^2 - 7x + 10$

(e) $-4x^2 + 8x - 3$

(b) $2x^2 + 7x + 5$

(f) $3x^2 + 17x + 10$

(c) $-2x^2 - 5x + 3$

(g) $-4x^2 + 12x - 9$

(d) $3x^2 - 4x - 4$

(h) $9x^2 - 24x + 16$