香港數學教育論題芻議
——第三份「另類報告」後篇[1]

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

筆者於「香港教育會議 — 04」中發表了「第三份香港數學教育另類報告」[2]。正如報告內開宗明義的說，原意是要每隔一段時期檢視一下香港的數學教育。在文中亦提到在第二份與第三份報告書之間（2000 – 2004），數學科以外的轉變（包括教改等）具有壓倒性的影響，故此無可否認，第三份報告是花了大部份的篇幅摟述了數學以外的教育問題。就算在後半部談及數學教育時，也較集中討論數學課程的發展[3]。其實筆者也準備了一些數學教育界值得進一步討論的議題。其原意是，在教改的洪流下，我們更須逐步形成「業界」的專業立場（故此提出了「自強運動」的想法），由數學教育界來詩論自身的問題，這才不至只是回應外圍的措施。

但若果有人認同筆者的想法，並進一步問，我們可以怎樣開始討論相關的議題呢？筆者準備了的議題就是嘗試回應這點。筆者確信這些議題均是目前極須理順的，可惜在大會中沒有時間詳述，現希望透過本文稍爲展開。不過首先要澄清的，本文之目的並不是要就這些議題提出個人的想法或結論，而是帶出可進一步考慮的一些角度，希望讓讀者了解問題之所在，或可作爲更深入討論之基礎。本文主要分成兩部份。在第一部分先提出一些較宏觀的議題而第二部分則轉到較具體關於數學教學上的一些問題。

一些較宏觀的議題

在「第三份報告書中」，筆者已列出了幾個議題，而對於其中的一些，某程度的討論其實已經展開了。現在闡述如下。

---

1 本文初期版本曾於 2004 年 10 月 15 – 16 日澳門教育暨青年局及北京師範大學合辦之《兩岸四地中、小學數學課程與教學改革學術論壇：數學教育與學生發展》研討會中發表。

2 黃毅英（2004）。第三份香港數學教育另類報告 —— 天翻地覆教改話滄桑。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）。《香港數學教育研討會 — 2004 論文集》頁 8 – 29。香港：香港大學教育學院及香港數教育學會。

3 報告在附錄中羅列了業界的一些活動，讀者可進一步瀏覽這幾年《數學教育》及香港數學教育雙年會論文集以知業界這幾年發展的梗概。

◆ 數學課程發展

學科與整體課程發展的矛盾恐怕不是始於今天，當中的問題甚至不局限於本港的問題。自然地，宏觀的教育及課程路向可以有它的發展，不少有用的跨學科想法，亦不斷地有所提出（如發現法、活動教學、課程統整等）。個別學科需要跟著這些大方向走，有其合理性。除了大方向要兼顧學科的特性外，我們也可自問，在「抗衡」跨學科政策壟斷學科發展的不良政策之餘，以數學科爲例，我們對數學課程應該是怎樣的、其教與學應該朝著哪個方向走等等問題是否應有多些討論，並逐漸發展一套專業的想法呢？

◆ 數學課程內容

這是「過程與內容」的老問題。在數學課程全面檢討中，似乎得到一個共識（「妥協」？）就是「過程能力」寄存在學科內容中發展（見「第三份報告」）。即是以代數幾何等數學內容爲主線，在教授這些內容的同時，兼顧問題解法、傳意、創新學種的能力。於是筆者就曾嘗試鉤劃一些以認識論爲基礎的課程主線[4]。但顯然地，一些新課程中較重視探究性的內容（如數型、空間想像力等）似乎暫時未能完全融入傳統上數學課程內容的發展脈絡，故此給人一個與其他內容格格不入的印象。筆者無意說要剔除這些課題，我們是否需要再花點功夫進一步理順這些新課題與舊有課題的關係呢？

◆ 生活與數學

不少論者（如黃家鳴先生[5]）已有不少討論，我們下一節再講述。

◆ 個別與課程分殊

如何既能處理個別差異又不會增加篩選的壓力呢？

◆ 學習與評核

2002 年的雙年會正是討論這個課題。隨著基本能力測驗、增值指標、學習成果架構等之訂定，這個議題似乎再值得拿出來討論。

4　黃毅英（2003）。從認識論的課程分析看現行中小學課程的幾個問題。載鄧幹明、曾倫尊（編）《學會學習：數學課程改革評析》，3 – 24。香港：香港數學教育學會。

5　黃家鳴(1998)。數學文字題及課業的處境應該有多真實？《數學教育》7 期，44 – 54。

◆ 資訊科技的專題研習

近年對這些教學手段的濫用有不少批評，但與此同時，亦有一些保守的教師借助這些批評拒絕探討資訊科技與專題研習的好處？究竟哪些科技在哪些課題、對哪些人比傳統教學有較佳的效果？是科技更優勝、與傳統教學互補還是應兩者溶合？這些都是值得探討的問題[6]。

從一題多解到多重表象

◆ 一題多解

在筆者「香港數學教育會議 — 04」的電腦展示其實已準備探討「一題多解」與「多重表象」這兩個議題，只可惜當時時間不足。在大會中，梁淑坤教授的演講裏，已談到台灣在建構數學課程所出現的問題。課程的本意是容許學生各自進行建構，故此各人的建構可以是有所不同。例如「一本書 12 元，4 本書多少錢？」除了 12×4 可以用 $12 + 12 + 12 + 12$ 來算，亦可以用 $(12 \times 2) \times 2$ 來算等等。不過當事情扭曲了，變成了學生就同「一題」必須提供「多解」[7]，甚或認爲「傳統」的 12×4 不是老師所要的答案！這與新數學時期的亂像如一丘之貉（當時就有一個笑話：老師要求學生答出 $2 + 3 = 3 + 2$，而不是 5，因爲老師在教加法的交換性質[8]）。有老師便曾問筆者，現時究竟有多少種「加法」？又有多少種加法要教[9]？因爲小學就有「順數」、「湊十」等等計算技巧。其實這個問題由來已久，最近筆者和一班朋友訪問了由六十年代到八十年代一直參與香港小學數學課程發展的馮源先生，他也提到當時他參考了英國的Nuffield數學，但其中一點他不太同意的，就是Nuffield數學往往提供單一觀念的多重理解，他說：「$1 + 2 = 3$，

---

6 Wong, N.Y. (2003). The influence of technology on the mathematics curriculum. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 271-321). Kluwer Academic Publishers.

7 見黃毅英（2003）。“建構主義教學”：慎防重蹈“新數學運動”的覆轍。《數學教學》2003 年 3 期，4 – 5。

8 見梁鑑添（1980）。評論近二十年來中學數學課程改革。《抖擻》38 期，64 – 75，83。後載《抖擻》編輯委員會（1981）。《香港數學教育論叢》，44 – 56。又載蕭文強（1995）（編）。《香港數學教育的回顧與前瞻》，31 – 56。香港：香港大學出版社。

9 黃毅英（2002）。數學學習 —— 由生活到數學化的道路。載黃顯華、朱嘉穎(編)。《一個都不能少：個別差異的處理》。299 – 306。台北：師大書苑。
黃毅英（2002）。《數學教育實地觀察 – II》。香港：香港數學教育學會。

你用了六種東西來教，⋯ 1 + 2 是應該（是怎樣就是怎樣）就這樣便完了，何必再畫蛇添足？」。究竟「一題多解」是容許「一題」有「多解」呢？題目的設置促成一題多解的可行性呢？還是要求學生「一題」必須提供「多解」呢？這些都是值得深思的。

◆ 開放題

與此相關的就是「操練題」與「開放題」、「操作法則」與「概念」（又或操作性理解、概念性理解等）的關係。例如曉得「通分母」進行分數加法是「操作法則」，從分數和加法的本來意義去了解分數加法便是概念性理解。雖然一般人似乎貶低前者，並有不少相關之提法，如「先了解概念，後應用」、又或「以應用題強化概念理解」等。愈來愈多學者（如Sfard, Tall [10]）指出操作法則不只是概念形成的階梯，而且法則本身是概念的組成部分。

至於開放題，伍鴻熙教授早已指出不是題目愈開放愈好 [11]，沒有數學意味的開放題容易變得放任自流。例如筆者曾聽過這麼的一個案例（確切數字忘記了）：車輪直徑 20 cm，以每分鐘 10 圈的轉速，問 7 分鐘後汽車走了多遠？（a）42 m，（b）44 m，（c）43.96 m。有學生選了（a）（其實是用了 $\pi = 3$），當老師要求他解釋時，他說這是由於車輪「打滑」（「跣胎」），但這其實不是一個數學的解釋！

又例如李柏良先生在大會中引用的一個例子：甲 3 分鐘游 50 米，乙 7 分鐘游 100 米，數學上當然乙的游泳速度較慢，但學生可從實際經驗解釋：多游 50 米會愈游愈慢。但我們可進一步問數學方法的其中一個特色（甚至是強項），不就是要（暫時）排除一些實際的因素考慮（蕭老師所說的「理

---

10 Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1 – 36.

Tall, D. (1998). Information technology and mathematics education: Enthusiasms, possibilities and realities. Plenary lecture, Eighth International Congress on Mathematical Education, Seville, Spain, 14 – 21 July 1996. In C. Alsina, J.M. Alvarez, M. Niss, A. Pérez, L. Rico, & A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 65-82). Sevilla, Spain: Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

11 Wu, H. (1994). The role of open-ended problems in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 115 – 128.

想化」[12]）而建立一個相當「乾淨」的數學模型嗎？（例如若把風阻浮力等也考慮在內，拋擲物件的其實不是一條拋物線！）。如果我們要把這些因素（無論是風阻還是游泳愈游愈慢）也考慮在內，同時用數學方法處理其實也是絕對可行的，不過我們要建立另一個更複雜的數學模型吧了。

近年瑞典的Marton及上海的顧泠沅等人分別提出變式教學[13]，其中基調均是從基本功（操練題、運算題等）出發，透過有系統的引入變化題或開放性，希望達至概念形成及高層次思維能力。張奠宙與戴再平亦有類似的提法[14]。黃榮金更引用Vygosky關於「腳手架」的想法加以解釋。但何時變、如何變 …… 似乎仍非筆者所完全掌握。當中亦涉及梁貫成教授在大會提到的「港式」（甚至「中國式」）的教學理念，就是多多少少依循Ausubel[15]的想法：既教師帶動（teacher led）亦以學生爲中心（student centred）[16]。Watkins和Biggs在討論華人學習時也提過「以學習爲中心」（learning centred，有別於learner centred）的觀念。簡言之，就是光由老師指導學生獲得紮實之基本功（筆者所說的「入法」[17]），再以變化（variation）的引

12　蕭文強(1978)。《爲甚麼要學習數學》。香港：學生時代出版社。第二版 (1992) 香港新一代文化協會。增訂本 (1995)，台灣：九章出版社。

13　鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003）。變式教學研究。《數學教學》。2003 年第一期，11 – 12 頁。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003）。變式教學研究（續）。《數學教學》。2003 年第二期，6 – 10 頁。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003）。變式教學研究（再續）。《數學教學》。2003 年第三期 6 – 12 頁。

Gu, L., Marton, F., & Huang, R. (2004). Teaching with Variation: A Chinese Way of Promoting Effective Mathematics Learning. In L. Fan, N.Y. Wong, J. Cai, &. S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders*. Singapore: World Scientific.

14　Zhang, D., & Dai, Z. (2004). “Two basics”: mathematics teaching approach and open ended problem solving in China. Regular lecture delivered at the 10th International Congress of Mathematics Education, Copenhagen.

15　Ausubel, D.P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton.

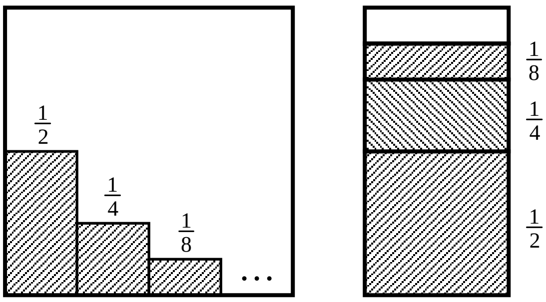
16　既非老師「滿堂講」、亦非學生只是之「滿堂轉」的自我發現式學習

17　Wong, N.Y. (2004). The CHC learner’s phenomenon: Its implications on mathematics education. In L. Fan, N.Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics:*

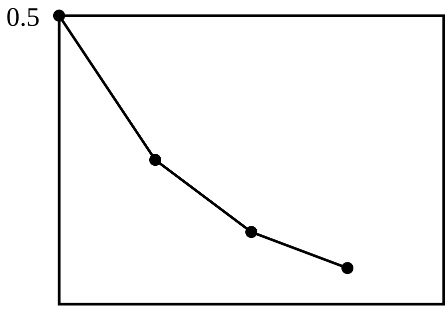
入啓迪學生內在能力之發展，但這種模式得到多大的認同和達至怎麼樣的效果仍需要進一步探討。

◆ 多重表象

多重表象（multiple representations）的提出起碼有兩個原因。比如$a_n = \frac{1}{2^n}$，$n = 1 , 2 , \ldots$，可以用數式 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{8}$ … 表示，也可以用圖示（圖一）、圖表（table）或折線圖顯示（圖二），甚或用公孫龍子的名句「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」去引入。爲了方便起見，我們暫只談同一概念的算式（代數）表示和圖示兩種。第一個原因，可能是要適應不同人的學習性向。簡言之，有些人較喜歡以代數方式思考，另一些人喜歡用圖像，提供兩者就可以同時滿足這兩種人。此外，多重表象可強化「內部表象」的結構。用極簡化的方式去形容，就是強化腦袋中不同概念間的連結（數字與圖形、運算與逆運算等：見圖三），這對於概念形成及關係的提取與運用甚有幫助[18]。



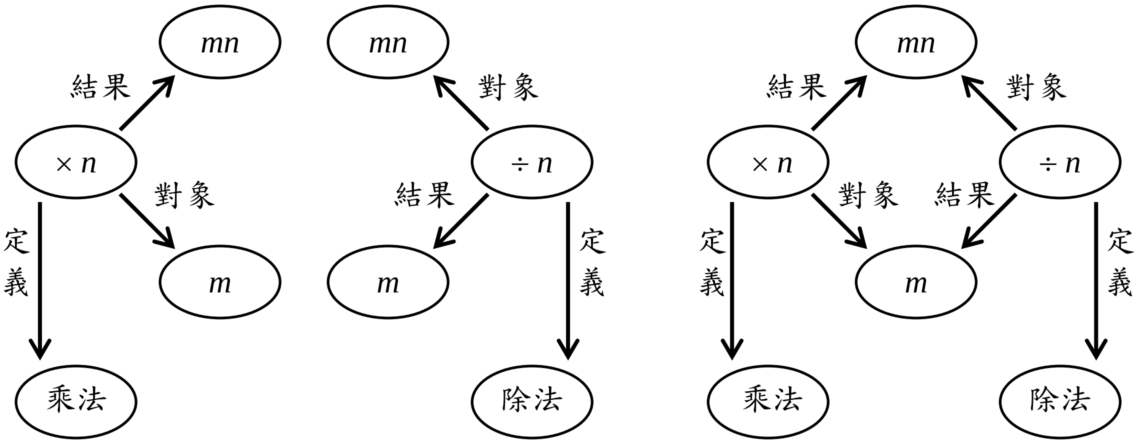
圖一 $\frac{1}{2^n}$ 的圖示

n	$\frac{1}{2^n}$	圖像
1	0.5	
2	0.25	
3	0.125	
⋮	⋮	

圖二 $\frac{1}{2^n}$ 的圖表及折線圖顯示

Perspectives from insiders (pp. 503 – 534). Singapore: World Scientific.

18 Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.



圖三　「內部表象」結構的嚴密性

故此，粗略而言，這涉及了「目的」與「手段」的兩個問題。若果把這個問題只是作爲一種「手段」去看待，那麼一個學生若用代數符號的運算方式已能充份了解某個概念（如分數除法），而他覺得學習分數除法的圖解相當困難，那就好像上面所說「一題多解」的情況，他根本不必學習後者了。但我們也可以說，對於這位只會代數表示而不會圖解的學生，他對這個概念的理解（雖然仍是同一概念）其實沒那麼豐富。如果用這個角度考慮，對一單一概念又是否提供愈多不同方式的表達愈好？若否，多少個才算適當？（這又是有多少種加法的問題！）

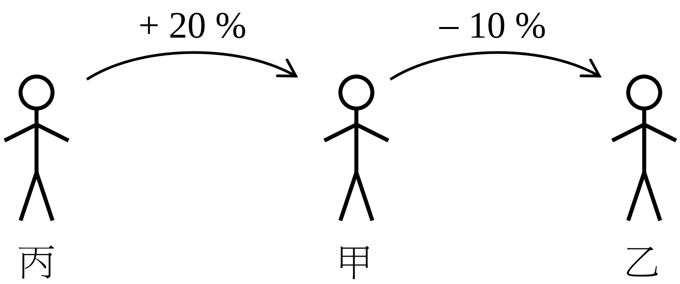
這當然亦衍生另一大堆問題。用一個誇張的描述，假若傳統上，小學的四則共有 100 個概念，以往都是用代數算術方式學習的，現變爲每個概念都均須同時學習它們的代數和圖像意義，那末，是須學習的東西不是由 100 變倍增到 200 樣嗎？於是我們可以看到，這已不只是學習問題，而是課程和課程要求的問題。這就是台灣的建構數學課程所出現的其中一個問題。

這中間也可以有不同的情況，現隨便舉一些例以便可作進一步的反思：

1. 三角比：似乎三角比（起碼在中學階段）很難不用輔助圖像（單位圓也好，直角三形也好）去定義，更何況是了解？

2. 函數：蕭文強老師已指出，函數在歷史上有不同的表示方式，其實它們代表了函數在不同時期的定義，也可以說是函數這個概念的不同面相。

3. 筆者「何不畫個表」一文[19]所說的基本上只是協助思考，用代數方法就能解決問題的恐怕大有人在。

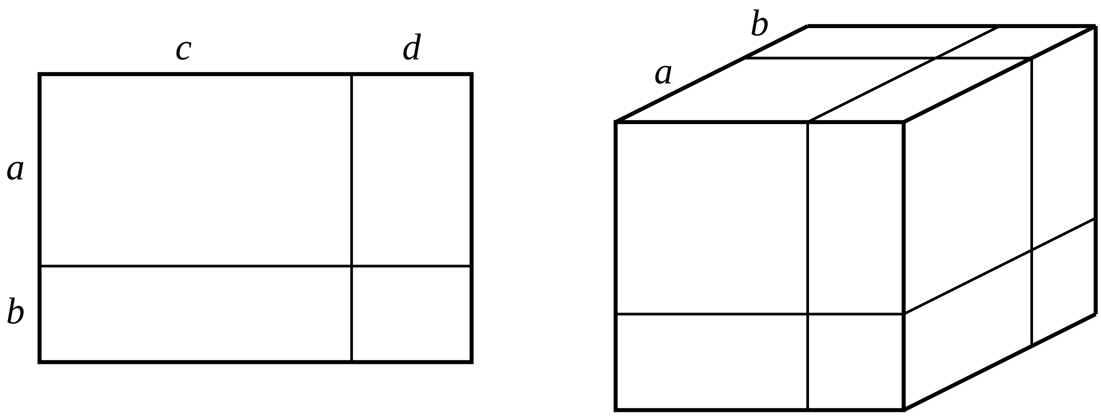


圖四　以圖示協助理解

4. 如圖五的圖像表示除了協助了解代數式展開外，還有豐富了解的作用，對於不少學生，用代數方式了解

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

可能更直接，在實際解決數題時，借助圖像可能變得麻煩。不過我所覺得學生若只會代數表示實在太陝窄了。

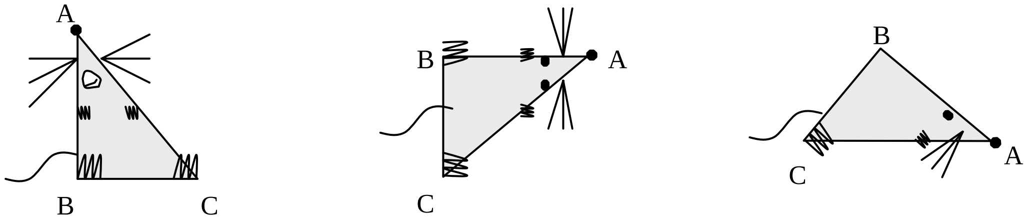


$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$　　$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

圖五 代數式展開的圖像顯示

19　黃毅英（2001）何不畫個表？《數學教育》13 期，36 – 38。

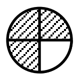
5. 如在圖六的圖像表示就可能太沒數學意義了[20]！又或對於 $y = ax^2 + bx + c$，「$a > 0$，所以開心地笑：☺，於是『碗口』向上」、「$a < 0$，所以就不開心了：☹，於是『碗口』向下」之類[21]。



圖六　「直角三角形是一隻老鼠」

若把這個問題看待成一個課程問題還相對地簡單。我們要考慮的可能是這些概念在課程內部在將來學習階段的發展。即是說，從考慮某個概念的各種表示方式（代數表式、圖式 ……）在往後的學習中是否用得著去衡量這些表示是必須學會或只作錦上添花。若果我們同意這種方向，我們就需要花一點時間仔細探討箇中的脈絡。

此外我們還要考慮（外在）表象之所以叫作表象，是因爲它不能「像真」的問題。故此筆者在《數學教育實地觀察 – II》引用了《金剛經》裏面所說的「凡所有相皆是妄語，若見諸相非相，則非妄語；如是諸相非相，則見如來。」其實蔡志忠《漫畫禪說》[22] 中便已有這麼的一個故事，一位琴人（古琴家）把琴曲彈完之後，有人問他彈的曲調是甚麼意思，於是琴人把曲再調一次 —— 因爲「說是一物即不中」。大部份（暫不敢說全部）的表象均是概念之一個面相，在另一個境面就未必可以「照版煮碗」。

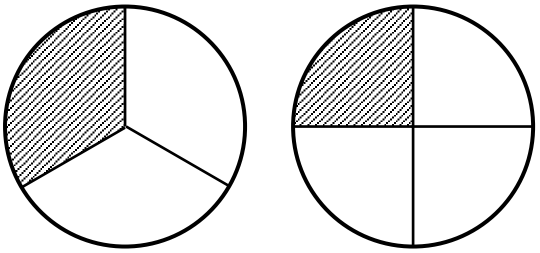
以 $\frac{3}{4}$ 這個分數爲例，它即是 3 個蛋糕分給 4 個人的結果（分物、代數表示），同時亦可以用  表示。但一些學生對 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{7}$ 的錯誤也是過份依賴這個「圖像思維」所至（圖七、八），而比較分數又要用另一套圖像（圖九、十）。分數乘法／除法又要轉用另一種圖示。於是乎學生要

20　黃毅英（2002）。《數學教育實地觀察 – II》。香港：香港數學教育學會。

21　黃毅英（2003）。「何以當 $a > 0$ 時，$y = ax^2 + bx + c$ 會很開心？」。《數學教育》16 期，48 – 51。

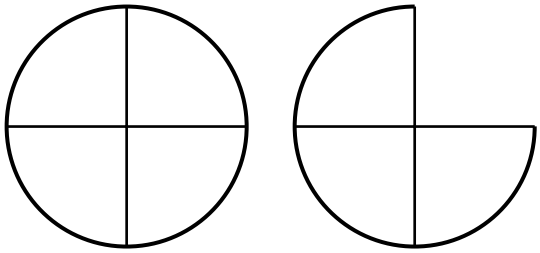
22　蔡志忠（1987）。《漫畫禪說》。台北：時報文化。頁 38。

額外「記清」分數用「月餅」、分數加法用「長條」……！—— 尤有甚者，這些圖像表示往往是要考的！

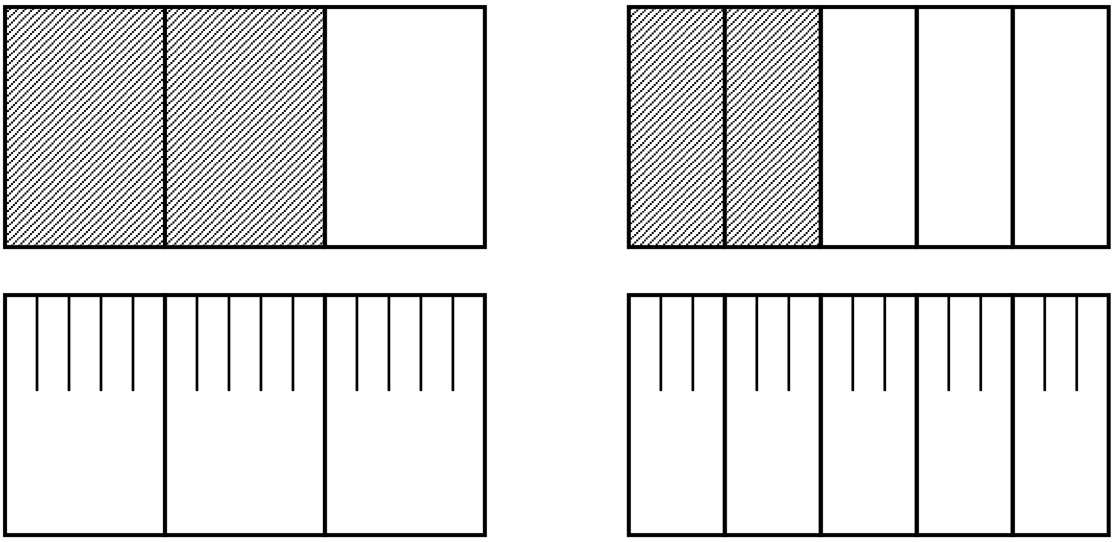


$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{7}\ ?$$

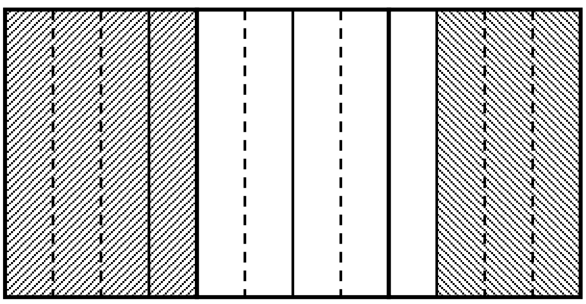
圖七　一個常見的錯誤



圖八　是 $1\frac{3}{4}$ 還是 $\frac{7}{8}$？



圖九　異分母分數的比較



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

圖十　分數加法

又例如有台灣學者提出以中國的「陰陽」去理解正負數的加減（圖十一），香港亦有教科書引用。亦有用數線在原點的反映「解釋」「負負得正」（反映兩次便是還原）（圖十二）。這些講法雖然頗為有趣（「負負得正」更巧妙地利用了物理學的力距去解釋），亦說不定引起了「加深印象」的作用。但仍是這個問題：以「陰陽」表示正負數，到正負數的乘除時就行不通了，原點反映又解釋不了正負數加減的情況，$4 \times [(-1) + (3)]$ 又可作何解釋呢？……

以陰陽模型學習有向數的加減

圖 A 所示為中國的太極符號，包括陰陽兩部分。它可以表示自然界中兩種相反的現象或事物，其中「陰」可以代表黑暗、寒冷等，有「負」的意思；「陽」可以代表光明、酷熱等，有「正」的意思。陰和陽合起來使表示一種平衡、和階和圓滿。

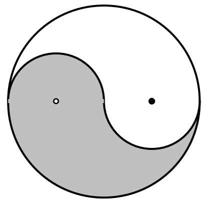


圖 A

如果以 +1 代表「陽」，以 –1 代表「陰」，圖 A 可簡化成圖 B，整個圓形便可表示 0 這數。

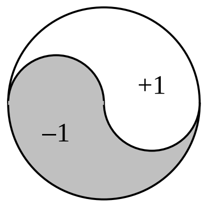
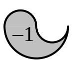
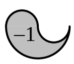
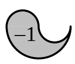
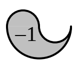
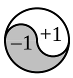
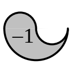
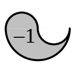


圖 B

老師可用卡紙製作若干個圖 B 依其中曲線分割成兩部分，然後以它們作為工具解說關於有向數加減的原理：

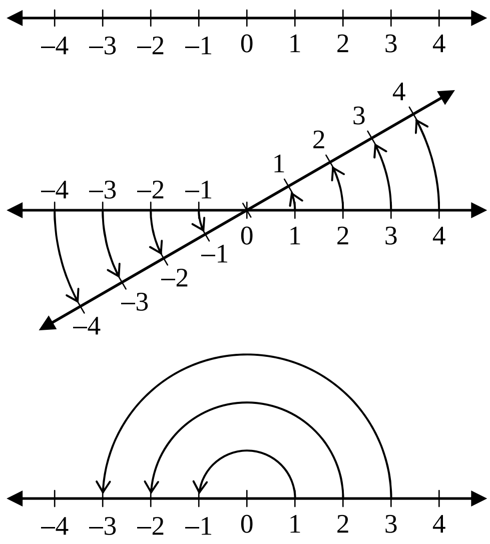
1. 若要計算 $(-1) + (-3)$，這相當於  加上   ，得出 4 張負卡紙，即結果是 –4。

   $\therefore \quad (-1) + (-3) = \underline{\underline{-4}}$

2. 若要計算 $(+1) + (-3)$，這相當於 1 張正卡紙加上 3 張負卡紙，而它們可排列成   ，即結果是 –2。

   $\therefore \quad (+1) + (-3) = \underline{\underline{-2}}$

圖十一　取材自：何碧燕、李信仲、許健成及林永發（2001）。《創意教學：數學篇》。台灣：幼師文化事業股份有限公司。



圖十二　取材自：榊榊忠男（2002）。《愛麗絲與孫悟空的數學之旅》。台灣：國際村文庫書店。

我們所需要的不只是「中間地帶」

李柏良先生在大會中提到我們要走到「中間地帶」(「大和解」？)，這誠然是一個不錯的提法，反正課程發展多多少少是件「共襄與平衡」的事情[23]。所以有些人指出近年的教育政策有「持分失衡」的現象，就是太一面倒的照顧監管的角度和「用家」的要求，忽略了教育理念。然而太過強調「中間地帶」，含有「妥協」的意味，有著得出「理念真空」四不像課程的危機。

也許我們所需要的不只是一種「共識」而是各展所長的一種伙伴關係（四維共濟！)。例如官員們比較熟悉政府的機制和教育路向（但傾向行政主導？)、學者有清楚的教育理念和視野（有時比較執著於科研數據？)、前線老師熟識實際問題（但較「滯後」及少「發聲」？)、專業團體較清楚業界的生態環境（但傾向於保護「勞工」權益？）……[24]。也許我們需要一種促進參與及「擁有權」[25]（ownership）的一種領導。數年前的數學課程全面檢討能給我們一些成功的經驗嗎？

23　黃毅英（1999)。序。《數學內外：數學教育文集》。香港：天地圖書。

24　黃毅英（1996)。教師、督學、講師的新伙伴關係。《學校數學通訊》16 期，3 – 6。

25　筆者一直沒法找到一個合適的中譯，有時譯作「擁有感」，而其實（ownership）遠超一種感覺。