

## 關於課堂上的數學研究性學習

——「畢氏定理」教學個案及分析

謝益民

廣州市暨南大學華文學院數學教研室

數學研究性學習是在教師的指導下，立足於教學內容，引導學生對某些數學問題或從數學的角度對日常生活中或其他學科中出現的某些問題進行類似於科學研究的一種學習方式。隨著數學課程改革的深入，這種學習方式逐步影響到數學教學，教師對數學研究性學習有不同的認識，有些教師佈置學生在課外開展一些小課題研究，如「存款問題」等等，有些教師力圖通過在課堂上開展數學研究性學習來培養學生的探索意識，從根本上改變學生的學習方式。究竟如何在數學課堂上開展研究性學習，本文結合筆者的教學實踐，以「畢氏定理」為教學個案來作一探討。

### 1. 課題提出

畢氏定理是《義務教育數學課程標準》（以下稱為《標準》）所要求掌握的重要內容，並強調「讓學生體驗畢氏定理的探索過程」，而且西南師範大學數學系張廣祥教授也指出：「讓學生知道畢氏定理的內容並學會自己證明畢氏定理是一件並不複雜的工作，但是如果學生事先不知道畢氏定理而要自發的發現它，這是一件極不簡單的工作」，為了使學生能夠在探索中「發現」畢氏定理，筆者用多媒體課件向學生展示將豎直放置的長方體木塊推倒的過程，試圖從實際生活背景來創設問題情境，引導學生在課堂上開展研究性學習：

問題 1：以水平面作為參照，試用幾何語言描述長方形 $ABCD$ 怎樣變換到長方形 $A'B'CD'$ 的過程（圖 1）。（以現實情境為背景，以激發學生探索、求知的欲望）

問題 2：如圖 2，你能發現對角線 $AC$ 與 $A'C$ 有怎樣的位置關係？試說明理由。（對問題 1 的深化，讓學生對幾何圖形的旋轉有深入的理解，為進一步探究作鋪墊）

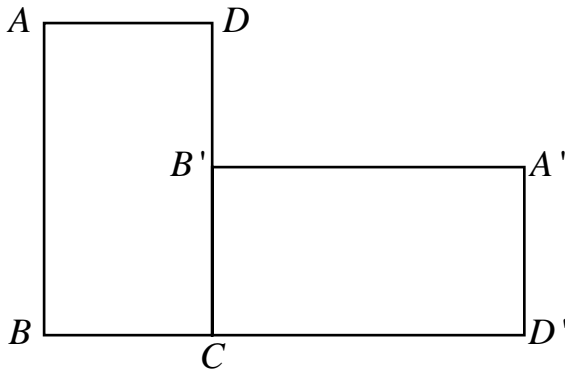


圖 1

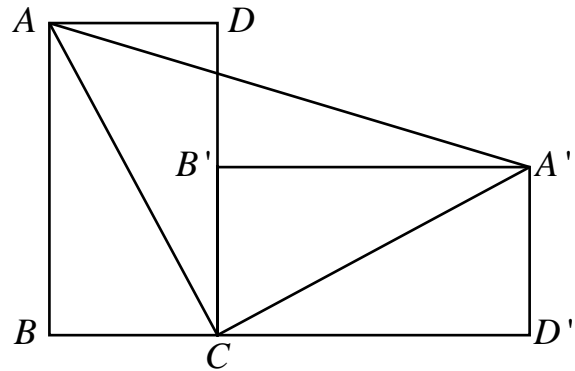


圖 2

問題 3：如圖 2，若長方形 $ABCD$ 的長和寬的長分別為 $a$ 、 $b$ ，對角線長為 $c$ ，連結 $AA'$ ，圖中有哪些你熟悉的幾何圖形？能用關於 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的代數式表示那些圖形的面積嗎？（讓學生在複雜的圖形背景中進行資訊選擇、甄別與處理）

問題 4：從這些面積的研究中發現了什麼？ $Rt \triangle ABC$  各邊之間有沒有特殊的數量關係？有怎樣的數量關係？（學生感覺自己在不經意中「發現」了畢氏定理）

## 2. 研究過程

### 2.1 獨立思考、自主探究

學生對問題進行獨立思考與探索，培養學生獨立探究的能力，也能對問題情景有自己獨到的理解，並形成初步結論，便於師生之間的交流與探討。

### 2.2 小組討論、形成結論

學生分小組（以前後 4 – 6 人為一組）對問題的解決方案進行交流、討論。

對於問題 1，長方形 $ABCD$ 怎樣變換到長方形 $A'B'CD'$ 的過程，各組通過實驗和觀察很快得出了一致的結論。

有一些組在解決問題 2 時遇到了障礙，雖然學生都能猜想對角線 $AC$ 與 $A'C$ 是互相垂直的關係，但無法從理論上得以解釋，這時教師提示學生應結合問題 1 來分析問題 2。經過提示，有些組能解釋對角線 $AC$ 與 $A'C$ 位置關係，而有些組繼續實驗與觀察，希望在實驗中得到進一步提示。

問題 3 提供了一個複雜的圖形背景，需要學生能對圖形所提供的資訊進行選擇、甄別與處理。各組很快發現了這個圖形中包含了一些長方形（矩形），直角三角形，並用 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 表示它們的面積，從而開始對問題 4 進行探究，但暫時找不到 $\text{Rt } \triangle ABC$ 各邊 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的關係式，重新審視問題 3，發現裏面還有一個直角梯形 $AA'D'B$ ，而這個直角梯形的面積恰好是 $\text{Rt } \triangle ABC$ 、 $\text{Rt } \triangle AA'C$ 、 $\text{Rt } \triangle A'CD$ 面積之和，這正是得出 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的關係式的關鍵所在，隨即問題 4 就迎刃而解了，不少學生感覺自己不經意中「發現」了畢氏定理。

上述研究過程中，每位同學都「動」起來了，積極參與到小組探索活動中，小組合作交流非常熱烈，教師則觀察各組的活動，對小組所遇困惑及時引導、鼓勵，甚至必要時還要直接參與，整體把握各組的進展情況，顯然教師的「教」已變成了「導」，教師不再是「知識的傳授者」，而是「學生發現知識的引導者」。

### 2.3 反思交流、驗證結論

個人探索與小組交流後，教師組織各個小組之間對研究過程進行反思交流。

師： 先請一組匯報一下問題 1 的探究成果。

組 2： 長方形 $ABCD$ 沿著 $C$ 點順時針轉動  $90^\circ$  變到長方形 $A'B'CD'$  的位置。（各組沒其他意見）

師： 不少組在研究問題 2 時遇到了困難，後來又解決了，希望各組將自己的所感、所悟與所思說出來，與大家一起分享！

組 3： 長方形 $ABCD$ 順時針轉動  $90^\circ$  變到長方形 $A'B'CD'$ 後， $\angle ACB = \angle A'CB'$ ，因為  $\angle ACB + \angle ACD = 90^\circ$ ，所以  $\angle A'CB' + \angle ACD = 90^\circ$ ，即  $\angle ACA' = 90^\circ$ ，從而 $AC \perp A'C$ 。（各組一致同意這個論證）

組 10： 長方形 $ABCD$ 順時針轉動  $90^\circ$  變到長方形 $A'B'CD'$  後， $AC$ 也順時針轉動了  $90^\circ$  變到 $A'C$ ，因此 $AC \perp A'C$ 。（教室裏一片唏噓）

組 4： 首先我們猜想 $AC \perp A'C$ ，但沒有證出來，所以放棄了，但我們在探究問題 3 時發現 $\text{Rt } \triangle ABC \cong \text{Rt } \triangle A'B'C$ ，因此得到了如組 2 一樣的證明方法。

組 9：我們組發現 $AC = A'C$ ，仔細一看原來 $A'C$ 就是由 $AC$ 轉過來的，所以也旋轉了 $90^\circ$ ，即 $AC \perp A'C$ 。（各組各抒己見，場面熱烈）

師：我發現很多組在問題 3 中表示出了一些三角形與長方形的面積之後就對問題 4 進行探索，請一個小組來談談感想。（各小組躍躍欲試，由組 8 發言）

組 8：當時只是覺得這個圖形是由兩個長方形和一些直角三角形組成，所以很快就表示出它們的面積了，可是在解決問題 4 時，怎麼也找不到 $\text{Rt}\triangle ABC$ 各邊 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的關係式，只得回到問題 3，對問題 3 作進一步探究時，原來這些直角三角形拼成了一個直角梯形，直角梯形 $AA'D'B$ 面積等於 $\text{Rt}\triangle ABC$ 、 $\text{Rt}\triangle AA'C$ 、 $\text{Rt}\triangle A'CD$ 面積之和，即 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab$ ，得出了一個有關 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的關係式，化簡後得到了畢氏定理： $a^2 + b^2 = c^2$ ！

本教學案例中，一些小組在探究 $AC$ 與 $A'C$ 位置關係和發現直角梯形 $AA'D'B$ 時遇到了困難，所以反思交流階段不但要對整個過程進行檢查，檢驗策略是否合理，而且也要對研究過程中所出現的困難以及解決困難的策略進行反思交流。

## 2.4 延伸問題、昇華提高

爲了使學生深入瞭解畢氏定理，鼓勵學生進一步提出問題。學生紛紛提出了諸如「爲什麼叫畢氏定理」、「還有別證明方法的嗎，而這些方法又有什麼差異呢」、「能全部找出滿足關係式 $a^2 + b^2 = c^2$ 數嗎」、「這個定理有什麼用呢」之類的問題，經過師生討論，提出「畢氏定理的起源」、「勾股數問題」、「畢氏定理證明方法的比較分析」、「畢氏定理的應用」等專題來進行研究，由於課堂上的時間限制，對這些問題的探究要延伸到課外，這既延伸了結論，又培養學生的問題意識，也讓學生帶著小課題邊學習邊研究，從根本上改變學生的學習方式。

## 3. 個案分析

「畢氏定理」的教學個案充分展現了《標準》所倡導的「情景 — 探索 — 交流 — 總結」這一數學學習模式，雖然只是立足於課堂開展數學研究性學習的一次嘗試，但它給我們帶來深刻的啓示。

### 3.1 促進了師生角色的轉變

教師「教」的轉變：在這個個案中，無論從問題情境的創設、研究小組的佈置、研究過程的指導、研究成果的交流還是進一步問題的提出，教師都在為學生營造一個激發探究潛能的氛圍，教師已由課堂單一的數學知識傳授者的角色，向數學學習活動的組織者、引導者與合作者轉變。

學生「學」的轉變：在畢氏定理的探索中，實現了由「模仿 — 重覆」到「探索 — 發現」、從「學會」到「會學」的轉變，學生不再是數學知識的被動接受者。

### 3.2 促進了學生動手實踐、自主探索與合作交流能力及問題意識的發展

《標準》指出：「動手實踐、自主探索與合作交流是學生學習數學的重要方式，…… 數學學習活動應當是一個生動活潑的、主動的和富有個性的過程」。本個案打破了傳統的課堂教學模式，選擇「現實的、有意義的、富有挑戰的」的內容，引導學生在實踐中不斷探索，在合作交流中又不斷提出新的問題，這有利於學生在探索中得到全面的發展。

### 3.3 促進了「單純模仿型雙基」向「能力型雙基」的轉化

長期以來，雖然「數學雙基」，即數學基本知識（如數學概念、公式、定理等）和數學基本技能（如快速準確地進行運算、開展嚴密的邏輯推理、掌握基本的解題套路等）的教學使我國學生具備紮實的數學功底，然而傳統的課堂教學往往由教師直接呈現教學內容，然後講解或示範，學生通過模仿與反復練習而掌握教學內容，僅僅獲得「單純模仿型雙基」。在尊重學生的個性品質與強調學生自主構建知識序列的今天，強調記憶、模仿、操練的「單純模仿型雙基」的缺陷日益凸現出來，學生的熱情與見解介入「數學雙基」的教學顯得十分必要，學生能對原本「冰冷」的知識恢復「火熱」的思考，在探究知識形成的過程中提升各自的數學能力，從而獲得「能力型雙基」。本個案中的教師並未直接給出畢氏定理的內容，再加以證明的方式呈現給學生，讓學生通過記憶和反復模仿而「學會」，而是立足於研究性學習的方式，組織學生在實踐、探索與交流中「發現」了畢氏定理，因此本個案為促進「單純模仿型雙基」向「能力型雙基」的轉化做了一次探索。

誠然，課堂上的數學研究性學習中，探究是擺在首位的，這是個人體

驗的源泉，是合作交流的保證，因此教師的「導」必須有「度」的把握，否則將限制學生的自主性，從而回到「灌輸式」的道路上去，我們應怎樣把握這個「度」？而過多的數學研究活動是否會掩蓋數學固有的本質？這些問題值得我們繼續探討！

### 參考資料

1. 教育部（2001）。《全日制義務教育數學課程標準（實驗稿）（第一版）》。北京：北京師範大學出版社。
2. 張奠宙（2003）。《數學教育經緯（第一版）》。南京：江蘇教育出版社。
3. 張廣詳（2003）。從畢氏定理看數學探究。《數學教學通訊》2003年2月（上半月）