

究竟學這些東西有甚麼用？

黃毅英

香港中文大學課程與教學學系

「究竟學這些東西有甚麼用」—— 這個可能是一個歷久常新的問題。學生常常問老師（尤其數學老師）這個問題，老師又不知如何回答。反正假若老師一本正經的回答時，學生可能自己嘀咕，心裏乾脆的回答：「我連上學也不知有啥用！」。如果你說某個數學在甚麼甚麼工程上、高年級的物理上有用，他更會說，「我根本沒打算唸上去！」

其實上面已指出了其中一個問題之所在。據筆者的經驗，一般來說，學生在遭遇學習困難（無論一般性的還是針對特定課題的）時，他才會產生「究竟學哩啲會有乜用（究竟學這些東西有啥用）？」的疑惑。故此老師若煞有介事的告訴學生某個課題在其他科目、在數學科的其他課題又或日常生活中的用途未必滿足學生的疑惑。

學生追求的可能是一種「關切性」。我們以往的研究顯示學生希望老師講解公式（及數學的技巧）是怎樣來的和如何得到運用¹。所謂怎樣來的不是證明而是它與以往知識與技巧間的來龍去脈。而所謂運用，不只是用的過程，而是怎樣曉得在哪個場合會想起用這道公式，也就是問題解決中如何能透過蛛絲馬跡找出適當的技巧。

以下筆者就探訪學校時所觀察到的兩個案例與大家分享。

（一）相似三角形

比如有一課相似三角形（similar triangles）的課，這恐怕是普通不過的課題了。其中涉及相似的兩個條件

- ① 三對對應角相等（A.A.A.）
- ② 對應邊成正比（3 sides prop.）

1 Wong, N.Y., Lam C.C., Wong, K.M.P., Leung, F.K.S., Mok, I.A.C. (2001). Students' views of mathematics learning: A cross-sectional survey in Hong Kong. *Education Journal*, 29(2), 37-59.

有些老師可能用一些例子交代過就算了（在眼下的環境，很少老師會去證明哩！學生是否真的不能明白證明又是另一回事²），於是講授可能變得平平無奇。其實當中之精蘊是「① \Leftrightarrow ②」是三角形所獨有的，對於其他多邊形，以上兩個條件要同時檢驗才算相似。假如從這點出發，就可以先舉出一些多邊形的例子，只有 ① 或只有 ② 而不是相似，最後引到三角形的獨特性質。於是經過了這一課，檢驗相似三角形就不用那麼麻煩了，檢驗 ①、② 其中之一就可以了。不只如此，有了 ①，就可運用 ② 求一些未知的邊；又或有了 ②，反過來用 ① 求未知角，這正是相似三角形的應用。於是在學生的角度看來，這個課題就變得有「用」得多了！

其中一個類似的情況是正弦公式（sine formula），在以往（低年級）我們往往透過切割直角三角形去找未知邊和角，但透過正弦公式就可一次過做完了。所以正弦公式與切割直角三角形的方法其實是一而二、二而一的（見圖一）。當然相似三角形這個課題還有一個「額外獎賞」，就是兩邊成正比及夾角相等（ratio of 2 sides, inc. \angle ）也表示三角形相似，於此不談。

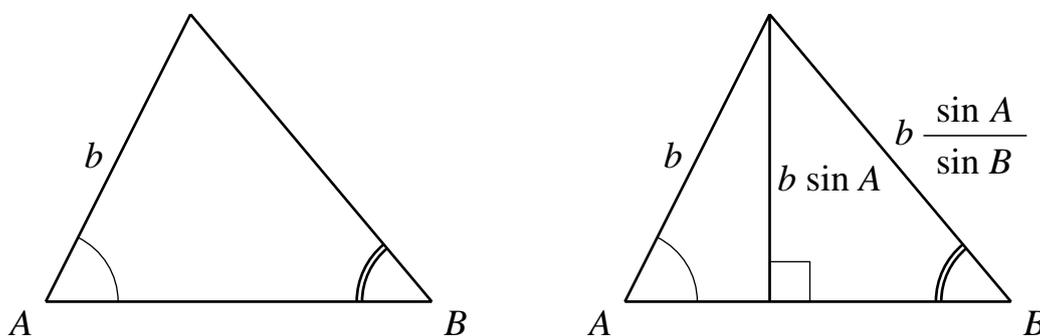


圖 一

2 見：

- (a) 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）。教（學）無止境：數學學養教師的成長。載林智中、韓孝述、何萬貫、文綺芬、施敏文（編）《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》，53 – 56。後載蕭文強（編）《香港數學教育的回顧與前瞻》，129 – 137。香港：香港大學出版社。
- (b) 黃毅英（2000）。「相似形的角和相似比」的教學構思。載張奠宙（編）。《點評本數學素質教育教案精編》，377 – 402。北京市：中國青年出版社。

此外，我們還可以聯繫到全等三角形 (congruent triangles)，利用與其他課題之聯繫 (connection) 增強這種「用」的感覺。當然大家清楚相似是形狀 (shape) 相同，全等加上了尺碼 (size) 相同。其他如正反 (orientation)、位置不相干。

更可進一步與低年級學過的幾何變換連上關係：平移 (translation) 與旋轉 (rotation) (線性變換，linear transformation) 保持了形狀與尺碼，不保持正反與位置，而放大 (包括縮小，enlargement) 連尺碼都不保持了。

此外，當中亦有「最少決定因素」的意念。理論上，我們可以把 ① 與 ② 都檢驗，甚至檢驗全等三角形時，按定義，可以把三角三邊全都檢驗了，但是數學上往往追求最少的決定因素，這其實是「抓緊主要矛盾、以簡馭繁」的重要數學思維方法之一。

然而，以上脈絡的鋪陳，與演練 (數學問題解決) 可能還有一點距離，正由於這個緣故，不少學生感到「上課聽明白，演練不會做」的無奈。因為要用得著上面的技巧，首先要撿出相似三角形來 (例如圖二中的幾種情況就要學生先撿出相似三角形來)。

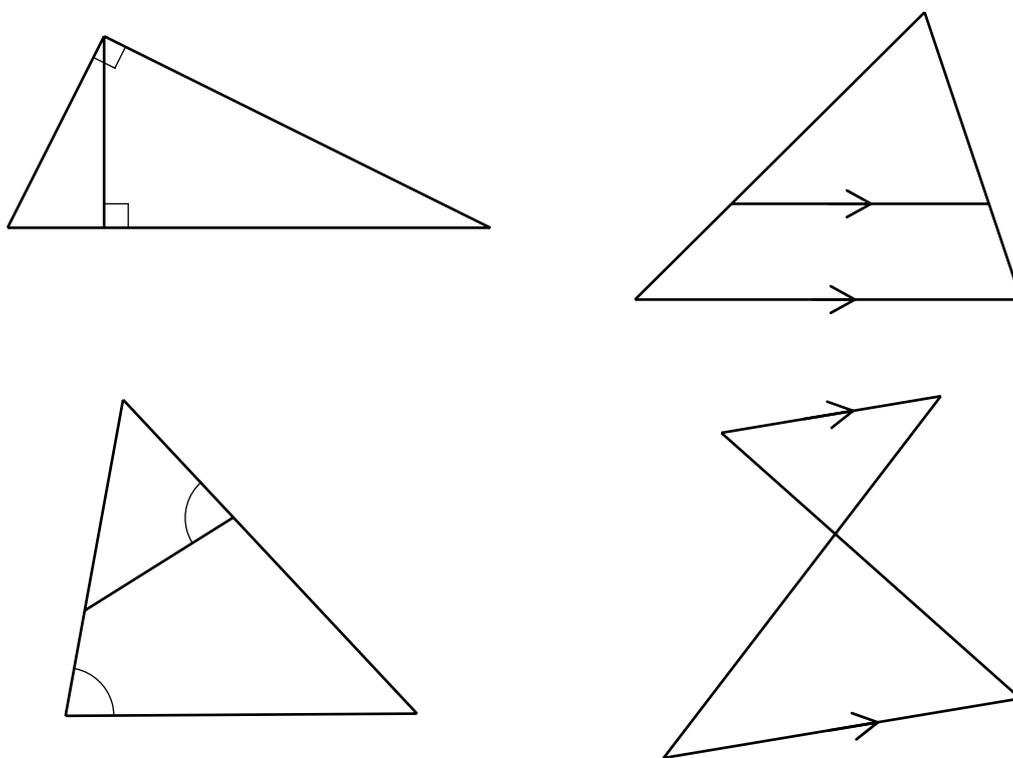


圖 二

筆者相信，若能把每個課題的來龍去脈勾畫清楚（不管是講授還是讓學生發現），學生不只覺得學習這些課題十分有用，當中之理解應該會更深刻。

(二) 多項式、單項式、數學名詞

另一個導致學生覺得課題無用的常見因素是覺得課題太悶。「悶」（枯燥）的原因當然有許多，包括老師的聲調、甚至學生的情緒等。不過太過糾纏於細節（尤其名詞的定義）可能是其中之一。例如多項式（polynomials）這個課題包括：

- 何謂單項式（monomial）？
- 單項式與多項式有甚麼分別？
- 係數（coefficient）、次數（degree）、常數（constant）
- 升幂（ascending power）、降幂（descending power）

等，我們也可以從以下角度去考慮問題：

- 何以要作分類？（在教學而言，歸類其實包括了概念之劃分與訂定，如分開等腰與不等腰三角形相等於定義等腰三角形，亦相等於勾出了等腰三角形的一系列獨特性質）
- 何以有些數學物件要特別給它一個名稱？（名詞除了包含了其中之概念外，亦隱含了其將來之常用性）

從這些角度，以上的幾個問題便可以作出如下的教學考慮：

- 單項式是多項式的組成部分，主要學習對象是多項式，故單項式不必花太多時間去仔細分辨哪些是單項式？（例如爭論 $3a + 4a$ 是否單項式等）
- 多項式的精神似乎在於其正整數幂而不是項的數量（例如究竟二項式是否多項式的一種？是否必須超過三項才算多項式），可集中舉一些多項式之非例子（如 $\frac{x^2}{y} + 5$ ， $\sin(x)$ ）加以說明。
- 係數、次數、常數等名詞因日後常用，故特別給予名稱，故

可多提這些名詞在日後（甚至具體的例題上）怎樣出現，例如說 $5x^8 + 3x^3 - 5x^2 + 5x + 5$ 中雖然有很多個 5，有些是 x^8 的係數，有些是 x 的係數。有一個是常數，地位不同，而且 x^2 的係數是 -5 ，不是 5。為方便起見，故引入係數、次數、常數等名詞。

- 升冪與降冪自然是整齊的排列，其中一個作用是在將來多項式加減時加以「對位」，為何習慣上較常用降冪，這可能與數位上 $8637 = 8 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7$ 的習慣有關。

總括而言，若概念、技巧、名詞等零碎地出現，學生不但產生困惑、對課題較難掌握之外，日後亦不容易記住（記憶貯存），在解決問題亦較難提取。突顯其中的脈絡³不須用上額外的教時，就好像炒一碟菜一樣，不是材料有否放齊的問題，而是主次分明，讓吃的人知道現在吃的是牛肉還是伴碟的蔥！

3 亦可參考黃毅英（2003）。從認識論的課程分析看現行中小學課程的幾個問題。載鄧幹明、曾倫尊（編）《學會學習：數學課程改革評析》，3-24。香港：香港數學教育學會。