直線的交角公式及
點到直線的垂直距離公式的
「簡單」證明

戚文鋒
中華基督教會譚李麗芬紀念中學

引言

在中學附加數學課程裏解釋幾何的章節中，直線的交角公式及點到直線的垂直距離公式經常會被使用：

1. 若兩直線的斜率分別爲m_1及m_2，且其交角中的銳角爲 θ，則
$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| 。$$

2. 由點 (x_1 , y_1) 到直線 $ax + by + c = 0$ 的垂直距離d爲
$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| 。$$

要證明上述公式，課程文件 [1] 或一般課本 [2, 3, 4] 都分別運用到三角學裡正切的複角公式及直線的法線式。其優點爲快捷，而缺點爲學生必須具上述的數學基礎才能理解證明方法。

爲免上述的缺點，本文嘗試介紹另外的證明方法。

直線的交角公式的證明方法

考慮兩條通過原點O的直線L_1及L_2，其斜率分別爲m_1及m_2（$m_1 \neq m_2$及$m_1 m_2 \neq -1$），其交角中的銳角爲 θ。設$A(x_1 , y_1)$ 爲L_1上的一點，並由A點作一垂直線到L_2，與L_2相交於B點。設B點的坐標爲 (x_2 , y_2)（見圖 1）。明顯地，$y_1 = m_1 x_1$及$y_2 = m_2 x_2$。

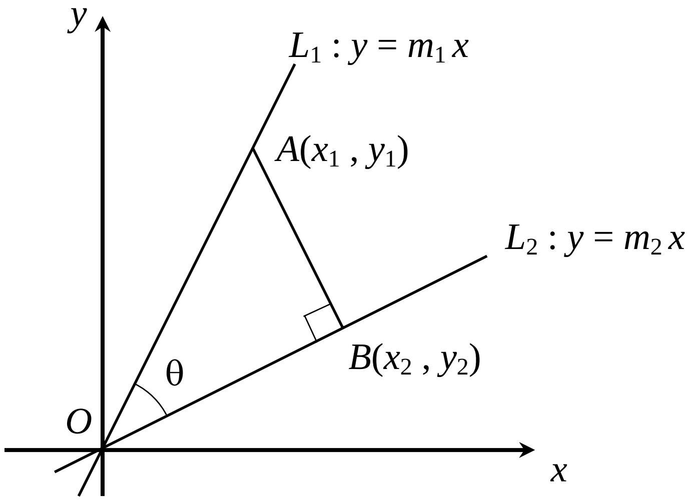

圖 1

由於 AB 垂直於 OB，故 $\dfrac{m_2 x_2 - m_1 x_1}{x_2 - x_1} m_2 = -1$ (1)

令x_2爲主項，可得 $x_2 = \dfrac{1 + m_1 m_2}{1 + m_2{}^2} x_1$ (2)

由畢氏定理，可知 $OB^2 = x_2{}^2 + (m_2 x_2)^2$

將 (2) 式代入並化簡後可得 $OB^2 = \dfrac{(1 + m_1 m_2)^2}{1 + m_2{}^2} x_1{}^2$

即 $OB = \left| \dfrac{1 + m_1 m_2}{\sqrt{1 + m_2{}^2}} x_1 \right|$ (3)

另外， $AB^2 = OA^2 - OB^2$

$= x_1{}^2(1 + m_1{}^2) - x_2{}^2(1 + m_2{}^2)$

將 (2) 式代入並化簡後可得 $AB^2 = \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{1 + m_2{}^2} x_1{}^2$

即 $AB = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{\sqrt{1 + m_2{}^2}} x_1 \right|$ (4)

最後考慮 ΔQAB， $\tan\theta = \dfrac{AB}{OB}$

將 (3) 式和 (4) 代入後可得 $\tan\theta = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

雖然此證明假設了L_1及L_2 通過原點，但對於任何兩條相交於一點的直線，也可通過平移，便得其相交點與原點重疊，而不影響兩線的斜率及其交角。故上述證明不失其普遍性。

點到直線的垂直距離公式的證明方法

(4) 式可改寫成

$$AB = \left|\frac{y_1 - m_2 x_1}{\sqrt{1+{m_2}^2}}\right| \qquad (5)$$

(5) 式是點到直線的垂直距離公式的一個特例。對於任意一點 $A(x_1 , y_1)$ 與一直線$L : ax + by + c = 0$（即斜率為 $-\frac{a}{b}$ ，y軸截距為 $-\frac{c}{b}$ ，假設$b \neq 0$），要找出垂直距離d，我們可向上或向下平移A點及直線L，使得L通過原點而不影響距離d。A和L平移後分別成為$A'(x_1 , y_1 + \frac{c}{b})$ 和$L' : ax + by = 0$(見圖 2)。

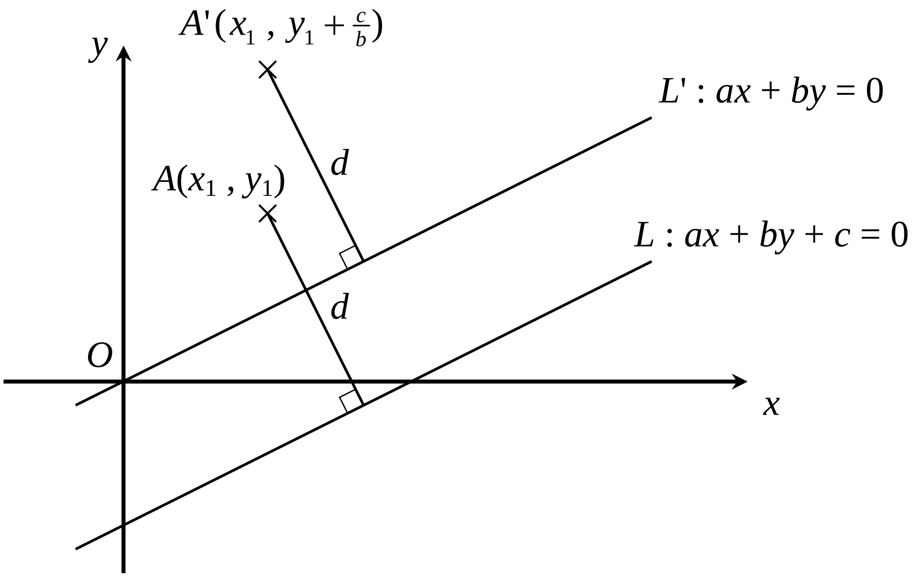

圖 2

根據 (5) 式可得

$$d = \left|\frac{(y_1 + \frac{c}{b}) - (-\frac{a}{b})x_1}{\sqrt{1+(-\frac{a}{b})^2}}\right|$$

即

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

結語

本文嘗試不利用三角學裡正切的複角公式來證明直線的交角公式，並嘗試不利用直線的法線式來證明點到直線的垂直距離公式。學生只須應用初中已學的知識（兩垂直線的斜率的乘積爲 -1、畢氏定理、平移等）便可證明有關公式，對理解公式有一定幫助，老師編排課程時亦可更具彈性。

參考書目

[1] 香港課程發展議會（2001）。《數學教育學習領域附加數學課程指引（中四至中五）》。香港：教育署。

[2] 李世威等（2002）。《新探索附加數學第二冊》。香港：香港教育圖書公司。

[3] 梅維光等（2002）。《附加數學新里程上冊》。香港：中大出版社。

[4] 蘇一方等（2002）。《文達附加數學第二冊》。香港：文達出版有限公司。