應用槓桿平衡原理巧解幾何比值賽題

于志洪
江蘇省泰州實驗學校

對於數學在物理中的應用，中學師生都並不陌生，然而對於物理在數學中的應用，一部分年輕教師和中學生就不太熟悉了。爲開闊師生視野、體現新課程改革的理念、策略、標準、特點及要求，充分認識數理結合、數理融匯貫通的重要性，本文現舉部分競賽題爲例，談談槓杆平衡原理在解幾何比值問題中的應用。

先複習槓桿平衡原理：

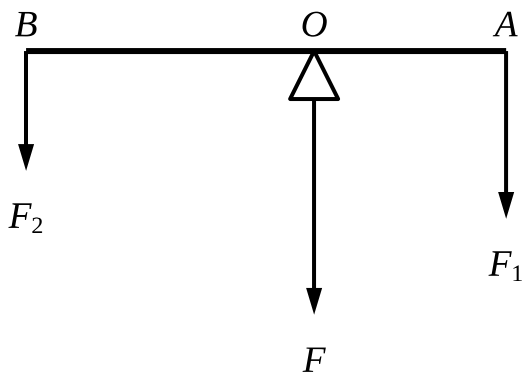

圖 一

如圖一所示：槓桿平衡的條件是：$F_1 : F_2 = OB : OA$，即$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB$。此時支點$O$所受的合力$F = F_1 + F_2$，或 $\Sigma M_0 = 0$，這時合力的方向跟分力的方向相同，合力的作用點在分力作用點的連線上，F_1、F_2、F叫做同向平行力，各分力對於以合力作用點爲支點的合力矩等於零。

接下來，我們就用這個物理學原理來處理幾個與比值有關的幾何問題。

一、求線段比

例一　如圖二，ΔABC 中，AD 是 BC 邊上的中線，F 是 AD 上的一點，且 $AF : FD = 1 : 5$，連結 CF 並延長交 AB 於點 E，則 $AE : EB$ 等於 (　　　)。

(A) 1 : 6　　　(B) 1 : 8　　　(C) 1 : 9　　　(D) 1 : 10

（2000 年河北省初中數學競賽題）

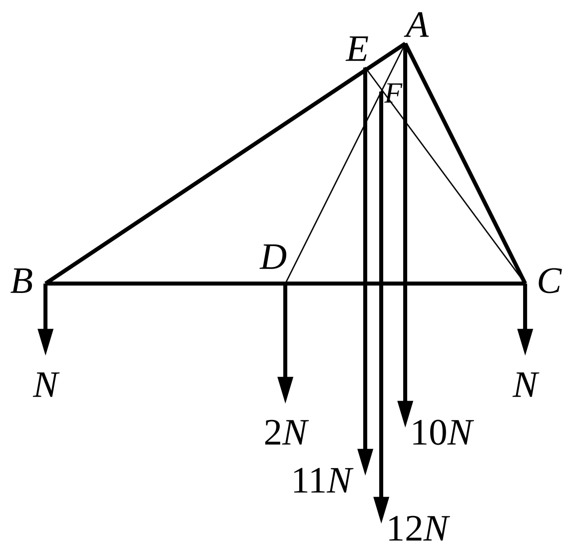

圖　二

解　(1) 觀察以 D 爲交點的系統 BDC，由於 D 爲 BC 的中點，故在 B 點掛 N 重物，在 C 點掛 N 重物，則在 D 點掛 $2N$ 重物，那麼系統 BDC 就可以達到平衡狀態。

(2) 觀察以F爲支點的系統AFD，由於$AF : FD = 1 : 5$，故應用槓桿平衡原理，得$x \cdot AF = 2N \cdot FD$，所以$x = 2N \cdot \dfrac{FD}{AF} = 2N \times 5 = 10\ N$，即$A$點受力爲$10N$。從而可知$F$點受力 $= F_A + F_D = 10N + 2N = 12N$，這時系統$AFD$就能達到平衡狀態。

(3) 觀察以 F 爲支點的系統 CFE，由於 F 點所受合力爲 $12N$，C 點所受分力爲 N，那麼 E 點所受分力爲 $12N - N = 11N$，這時系統 CFE 就能達到平衡。

(4) 觀察系統AEB，由於A點所受分力爲 $10N$，E點所受合力爲 $11N$，B點所受分力爲N，所以 $11N = 10N + N$，故$F_E = F_B + F_A$，從而以E爲支點的系統AEB正好處於平衡狀態，於是應用槓桿平衡原理得$AE \cdot 10N = BE \cdot N$，因而 $AE : EB = 1 : 10$。故應選 (D)。

二、求面積比

例二　如圖三，ΔABC 中，E、F 分別在 AB、AC 上，$AE = \frac{1}{2}AB$，$AF = \frac{1}{4}AC$，延長 FE 交 CB 的延長線於 G，則 ΔEGB 和 ΔAEF 的面積比是 ________。

（2001 年第十二屆「希望盃」全國數學邀請賽初二培訓題）

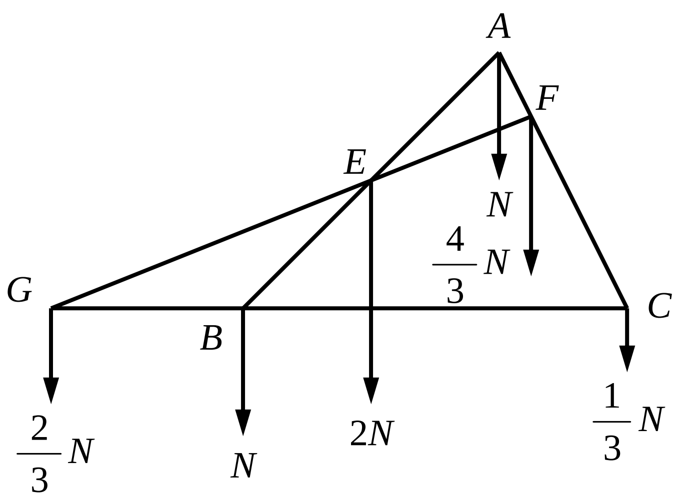

圖　三

解　(1) 觀察以 E 爲支點的系統 AEB，由於 $AE = \frac{1}{2}AB$，所以 $AE = EB$，故在 A 點掛 N 重物，在 B 點掛 N 重物，則在 E 點掛 $2N$ 重物，這時系統 AEB 就達到平衡狀態。

(2) 觀察以 F 爲支點的系統 AFC，由於 $AF = \frac{1}{4}AC$，所以 $AF = \frac{1}{3}FC$。因爲 A 點受力 N 牛，故應用槓桿平衡原理得，$x \cdot FC = N \cdot AF$，從而得 $x = \frac{1}{3}N$，即 C 點受力 $\frac{1}{3}N$，因此要使系統 AFC 達到平衡，則 F 點所受合力爲：$\frac{1}{3}N + N = \frac{4}{3}N$。

(3) 觀察以 B 為支點的系統 GBC，由於 C 點受力 $\frac{1}{3}N$，B 點受力 N，則 G 點所受分力為：$N - \frac{1}{3}N = \frac{2}{3}N$，這時系統 GBC 才能達到平衡狀態。

(4) 觀察系統 GEF，這裏以 E 為支點，由於 E 點所受合力為 $2N$，F 所受分力為 $\frac{4}{3}N$，故當 G 點所受分力為：$2N - \frac{4}{3}N = \frac{2}{3}N$ 時，系統 GEF 就可以達到平衡狀態。從而應用槓桿平衡原理可以得到：$\frac{2}{3}N \cdot GE = \frac{4}{3}N \cdot EF$，所以 $\frac{GE}{EF} = 2$。因 $\frac{S_{\Delta EGB}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{\frac{1}{2}GE \cdot EB \sin\angle GEB}{\frac{1}{2}EF \cdot EA \sin\angle AEF}$，而 $\angle AEF = \angle GEB$，$GE : EF = 2$，$EB = EA$，所以 $S_{\Delta EGB} : S_{\Delta AEF} = 2$。

三、求連比

例三　如圖四，ΔABC 中，D、E 是 BC 邊上的點，$BD : DE : EC = 3 : 2 : 1$，M 在 AC 上，$CM : MA = 1 : 2$，BM 交 AD、AE 於 H、G，則 $BH : HG : GM$ 等於 (　　　)。

(A) 3 : 2 : 1　　(B) 5 : 3 : 1　　(C) 25 : 12 : 5　　(D) 51 : 24 : 10

（2000 年「魯中盃」紹興四市、縣初中數學競賽聯賽題）

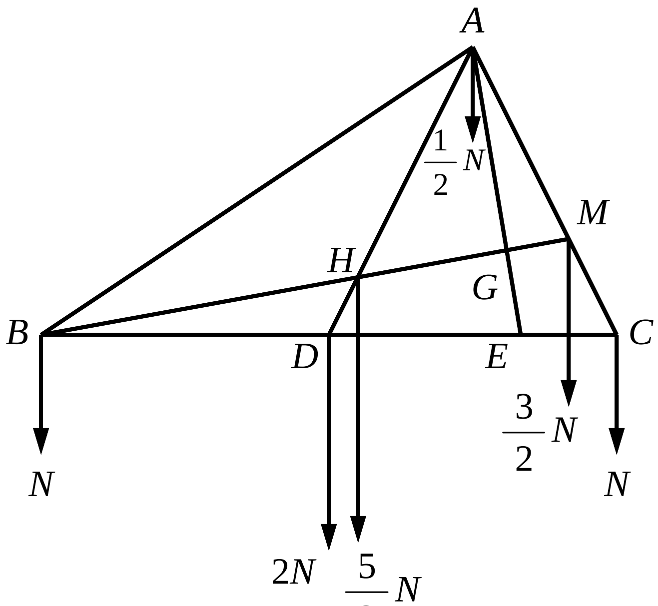

圖　四

解　(1) 觀察以 D 爲支點的系統 BDC，由於 $BD : DC = 3 : (2 + 1) = 1$，所以在 B 點掛 N 重物，在 C 點掛 N 重物，在 D 點掛 $2N$ 重物，那麼系統 BDC 就可以達到平衡狀態。

(2)　觀察以 M 爲支點的系統 AMC，由於 $CM : MA = 1 : 2$，C 點掛 N 重物，則由槓桿平衡原理得，$x \cdot MA = N \cdot CM$，所以 $x = \frac{1}{2}N$，即 A 點受力 $\frac{1}{2}N$，從而要使系統 AMC 達到平衡狀態，那麼 M 點所受合力爲：$N + \frac{1}{2}N = \frac{3}{2}N$。

(3)　觀察以H爲支點的系統BHM，由於B點受力N，M點受力 $\frac{3}{2}N$，那麼要使系統BHM達到平衡，則H點所受合力應爲：$N + \frac{3}{2}N = \frac{5}{2}N$，而 $\frac{5}{2}N = 2N + \frac{1}{2}N = F_D + F_A = F_H$，說明系統$AHD$處於平衡狀態。因此應用槓桿平衡原理理得：$N \cdot BH = \frac{3}{2}N \cdot HM$，故$BH : HM = 3 : 2$ ....(I)

　　同理可求得：$BG : GM = 15 : 2$ ....(II)

　　設 $BH = x$，$HG = y$，$GM = z$，則由 (I) 和 (II) 得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+z} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{51}{10}z \\ y = \dfrac{12}{5}z \end{cases}$$

$\therefore$　$BH : HG : GM = x : y : z = \frac{51}{10}z : \frac{12}{5}z : z = 51 : 24 : 10$

$\therefore$　應選 (D)。

　　綜上所述可知：應用槓桿平衡原理解幾何比值問題，雖然看起來有些繁瑣，但實際上這種方法卻很有規律，如用純幾何方法求解，則不僅要作輔助線，而且運算量也較大，讀者如有興趣，不妨將兩種解法加以對比，即知底裏。

另外應用槓桿平衡原理爲甚麼能上述幾何比值問題呢？其關鍵在於：我們可將幾何圖形中的各個交點視爲力點，從而可得到若干同向平行力，再利用兩個同向平行力的合成法則：「合力的大小等於兩分力的和，合力的方向跟分力的方向相同，合力的作用點在分力作用點的連線上，各分力對於以合力作用點為支點的合力距等於零。如圖一，即：$F = F_1 + F_2$，$\Sigma M_0 = 0$ 或 $F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB$」來求解。

此法數理結合、富有規律、解題明晰，故有必要引起重視。

附練習題

1. 在 ▱$ABCD$ 中，M、N 爲 AB 的三等分點，DM、DN 分別交 AC 於 P、Q 兩點，則 $AP : PQ : QC = ?$

   （2001 年河北省初中數學創新與知識應用競賽題；答案：5 : 3 : 12）

2. AD 是 ΔABC 的中線，E 是 AD 上的一點，且 $AE = \dfrac{1}{3}AD$，CE 交 AB 於點 F，則 (1) $AF : AB = ?$ (2) $S_{\Delta AFC} : S_{\Delta BFC} = ?$

   （2000 年山東省初中數學競賽題；答案：(1) 1 : 5 (2) 1 : 4）

3. 過 ΔABC 的頂點 B 的兩條直線分三角形 BC 邊上的中線 AD 所成的比 $AE : EF : FD = 4 : 3 : 1$，則這兩條直線分 AC 邊所成的比 $AG : GH : HC$ 爲 (　　　)。

   (A) 4 : 5 : 3　　(B) 3 : 4 : 2　　(C) 2 : 3 : 1　　(D) 1 : 1 : 1

   （1993 年第八屆江蘇省初中數學競賽題；選 (B)）

參考資料

[1] 于志洪。巧用槓桿平衡原理妙求幾何比值問題。《貴州省安順師專學報》。2001(1)。

[2] 于志洪。一類幾何問題連比題的解法。《數理天地（初中版）》。中國優選法統籌法與經濟數學研究會主辦，1992(2)。