尋找費馬點 ——
從一道數學應用問題談起(*)

傅海倫、石玉華
山東師範大學數學系

一、歷史上的費馬點問題

在數學教學中，有這樣一道數學應用問題：在哪裏建學校，可使分別使附近的三個村子 A、B、C 的三位學生到學校所走路程之和最小？

此問題實質為：給平面上 A、B、C 三點，試尋求一點 F，使距離和 $FA + FB + FC$ 達到最小。這在歷史上被稱作的費馬（Fermat）點問題，所求的費馬點，就是建學校的位置。

首先應考慮一種簡單的情況：當附近的三個村子 A、B、C 在同一條直線上時，取中間的那個點就是所求的費馬點。

當附近的三個村子 A、B、C 不在同一條直線上時，如何尋找費馬點，曾引起人們的極大興趣，當時物理學家伽利略（Galileo，1564 – 1642）的學生、義大利物理學家、氣壓計的發明者托裏拆利（Torricelli，1608 – 1647），在他的《幾何學》（1644 年）中，首次用幾何方法證明了費馬點是正 ΔABM、正 ΔBCN、正 ΔACP 的外接圓的交點，如圖一，此點被稱為托裏拆利點，三個外接圓被稱為托裏拆利圓。托裏拆利還證明了若 ΔABC 三內角都小於 120° 及有一個角大於或等於 120° 的情況。

托裏拆利工作的基礎上，英國數學家辛普生（Simpson，1710 – 1761）於 1750 年得出一個重要結論：連結 AN、BP 和 CM，三線段也相交的點就是費馬點。

19 世紀初，瑞士著名幾何學家斯泰納（Steiner，1796 – 1863）重新研究這一個問題，他用純幾何的方法證明了在具有定周界的所有三角形中，等邊三角形包圍的面積最大，同時找到了費馬點。1834 年，德國數學物理

(*) 作者按： 數學天元青年基金、教育部青年專項課題（EHA10449）和山東師範大學新世紀教學改革項目之成果。

學家海涅（Heine，1821 – 1881）進一步指出：*AN*、*BP* 和 *CM* 線段的長度相等，且都等於 $FA + FB + FC$。

1941 年，著名美籍德國數學家柯朗（Courant，1888 – 1972）和美國數學家羅賓斯（Robbins，1915 –　）寫的名著《數學是甚麼》中，把費馬問題稱爲斯泰納問題，此書影響很大，所以至今稱這問題爲斯泰納問題，稱 *F* 點爲斯泰納點。

隨著當代的的最短路在交通運輸、通訊、電腦等經濟和科技領域中的重要應用，對費馬點問題研究的理論價值越來越大。問題的物件也早已從三點擴展爲任意有限個點集，而且對於連結給出點集的最短網路也有專門名詞，叫最小斯泰納樹。

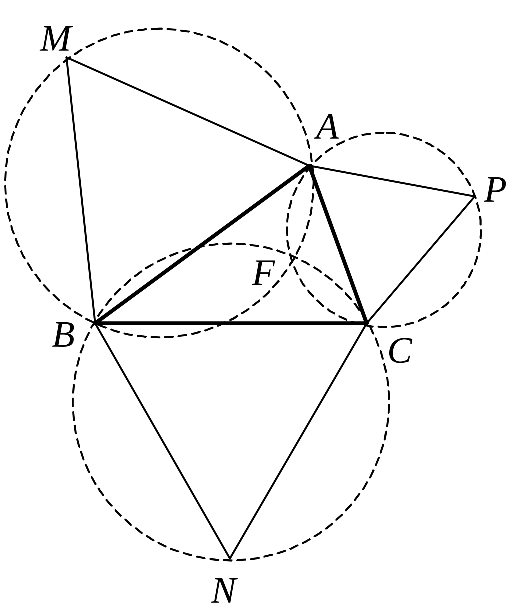

圖　一

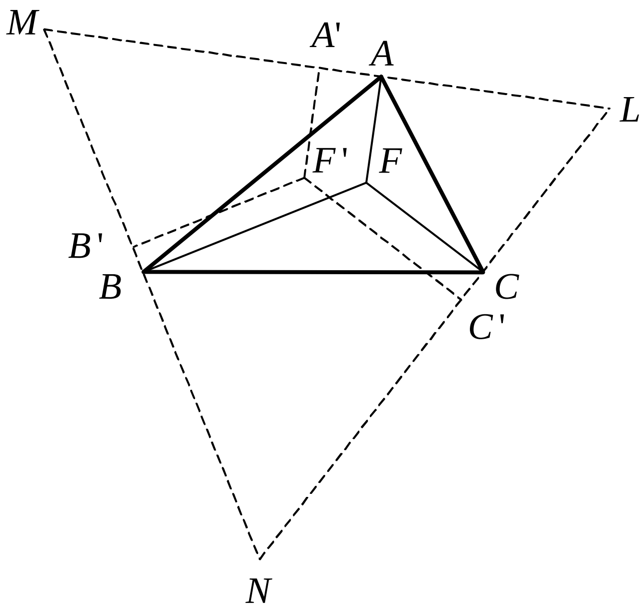

圖　二

二、費馬點的簡單幾何證明

一般情況下，採取數學的方法解決。如果給出具體數值，當有三內角都小於 120° 時，如圖二所示，學生們可利用平面幾何的方法找到符合條件的學校位置 *F*（費馬點），它使得 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$（具體作法略）。

簡單證明：過點*A*、*B*、*C*分別作*FA*、*FB*、*FC*的垂線，三垂線相交於*M*、*N*、*L*三點，則根據四點共圓的知識，可知 ΔMNL的三內角均爲 60°，即 ΔMNL爲等邊三角形。由於等邊三角形中任一點到三條邊之垂線段之和爲一定值

（事實上，正 ΔMNL的面積$S_{\Delta MNL}$與高h均爲定值，由$S_{\Delta MNL} = S_{\Delta FLM} + S_{\Delta FMN} + S_{\Delta FNL}$，即 $\frac{1}{2}(FA + FB + FC)\,MN = \frac{1}{2}\,h\,MN$，知$FA + FB + FC = h$爲定值）。若取異於$F$點的任一點$F'$，過$F'$ 分別作$F'A' \perp ML$，$F'B' \perp MN$，$F'C' \perp NL$，由於在直角三角形中，$F'A' < F'A$，$F'B' < F'B$，$F'C' < F'C$，則$FA + FB + FC = F'A' + F'B' + F'C' < F'A + F'B + F'C$。因此，$FA + FB + FC$爲最小值。此$F$點即爲費馬點。

當有一內角大於 120° 時，費馬點即爲這個大於 120° 的內角頂點。

三、利用物理學原理求費馬點

再換個思考角度，下面借助於物理中力系平衡原理和最小勢能原理求解。

方法：在一水平木板上，將三個村子落在相當的 A、B、C 三點位置上。在 A、B、C 處各打一小洞（要均勻光滑），取三條線繩紮結於一點 F，穿過洞各掛 1 千克的重物。當系統平衡時，繩結 F 點所在位置即爲所求。如圖三，當三個力系平衡時，三重物的勢能的和應達到最小，即在洞下面部分的繩的總長應達到最大，由於繩的總長是定值，故洞上面部分總長 $FA + FB + FC$ 達到最小。

現在的問題轉化爲：確定 F 應處在何位置，系統才能平衡。要分以下兩種情況討論：

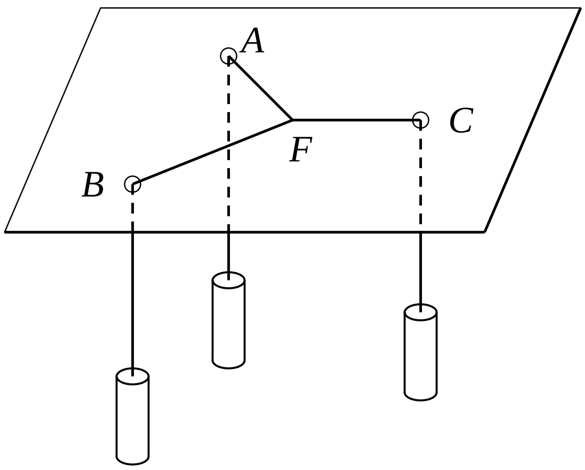

圖　三

(1) 若 ΔABC 的內角均小於 120°，系統平衡（對於作用於 F 點上的三個力，可看作過 F 點的三個向量：$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FC}$。由於力的大小都爲

1 千克，故這三個力的向量長度應相等。當系統平衡時，三向量經平行移動應可圍成正三角形，且向量方向和在三角形邊界上的向量方向是一致的。根據向量性質：若不共線三向量 $\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FC}$ 構成三角形，則充要條件爲 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$。由於正三角形的內角都是 60°，因此，系統平衡時，F 不能與 A、B、C 重合，這時有 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$。

(2) 若 ΔABC 有一不小於 120°，不妨設 $\angle A \geq 120°$，則使得 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$ 的且與 A、B、C 不重合之點 F 是不存在的，只有沿 $\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FC}$ 方向的二力之和不大於 1 千克才行，因此，系統平衡只能發生在大於或等於 120° 的內角角頂點 A。

總之，要使 $FA + FB + FC$ 最小，則若 ΔABC 有一內角 $\geq 120°$，F 應選在最大內角頂點；當 ΔABC 的內角均小於 120° 時，F 應選取在滿足 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$ 條件的位置上。

拓展：若三個村子 A、B、C 分別有 m、n、p 個學生，要使所有學生走到學校的路程之和最小，學校 F 又該建在哪個位置？

類似地，運用物理學的勢能最小原理，只要仿上題將三條繫在一起的繩子穿過小洞按各校的學生數分別掛 $m : n : p$ 的三個重物，當系統平衡時，繩結 F 所在的位置即爲所求。

綜上所述，在解決數學問題時，巧妙地利用了數學史上的思想方法及物理學的有關原理，突破了解決數學問題的傳統思維方式，這種處理問題的方法對培養學生的能力特別是綜合運用學科知識的能力，全面提高科學素質具有重要的價值。數學教師應該教會學生變通思維，靈活運用學科間互通的相關知識，廣角度、新視覺地思考數學問題，這方面的研究有待加強。

參考文獻

[1] 蔣文蔚，《數學發現與成就》，廣西師範大學出版社，1996 年

[2] 傅海倫，「數學解題中的若干原型啓發」，《教學與管理》，1996 年第 4 期

[3] 徐本順、解恩澤，《數學猜想集》，湖南科學技術出版社，1999 年