公式 $S=\dfrac{a_1}{1-q}$ 的幾何解釋

王成營
山東省章丘市第三中學
傅海倫
山東師範大學數學系

以 a_1 爲首項，q（$0<|q|<1$）爲公比的無窮遞縮等比數列 a_n 的所有項和 $S=\dfrac{a_1}{1-q}$，有多種證明方法。對於 q 爲有理數的情形，這裏用一種構造圖形面積的證明方法，爲學生提供一種直觀的幾何解釋，使學生加深對這一公式的理解，激發學生的學習興趣，教養學生的直觀創造能力。

爲了構造方便，先假設 $a_1=q$，分以下幾種情況進行證明。

一、$q=\dfrac{1}{k}$（$k>2$ 且 k 為自然數）

爲了尋找到一般的規律，我們先考察幾個簡單特例。

1. 當 $k=2$ 時，即證明 $S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots\cdots=1$

我們設法構造對應於各項的圖形面積如下（參照圖一）：取一個單位面積的矩形，均分爲甲、乙兩部分，則每一部分的面積爲 $\frac{1}{2}$，然後再將乙均分爲兩部分，則每一部分的面積爲 $\frac{1}{4}$，將其中一部分給甲，繼續使用這種分割分配方法，則乙的面積遞減趨於 0，甲的面積遞增趨於 1，且

$S_{甲}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots\cdots=1$。

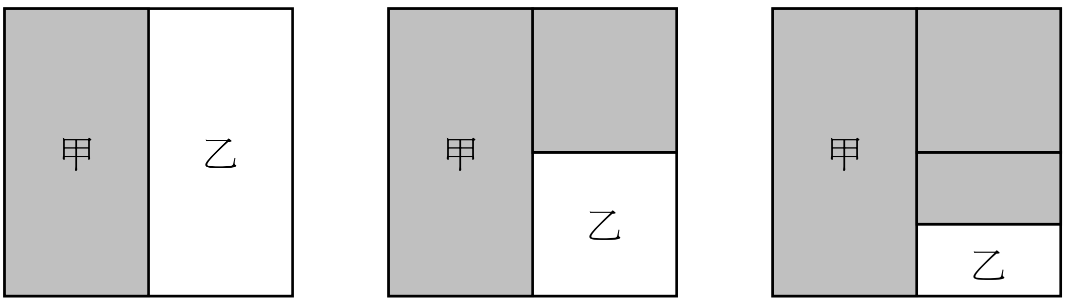

圖　一

2. 當 $k=3$ 時，即證明 $S=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}$

我們同樣設法構造對應於各項的圖形面積如下（參照圖二）：取一個單位面積的矩形，將其均分爲三部分，分別記爲甲、乙和 $S_{剩}$，則每一部分的面積爲 $\frac{1}{3}$，然後再將 $S_{剩}$ 再均分爲三部分，每一部分的面積爲 $\frac{1}{9}$，將其中二部分別給甲與乙，繼續使用這種分割分配方法，則 $S_{剩}$ 的面積遞減趨於 0，甲與乙的面積相等且遞增趨於 $\frac{1}{2}$，而且

$$S_{甲}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\text{。}$$

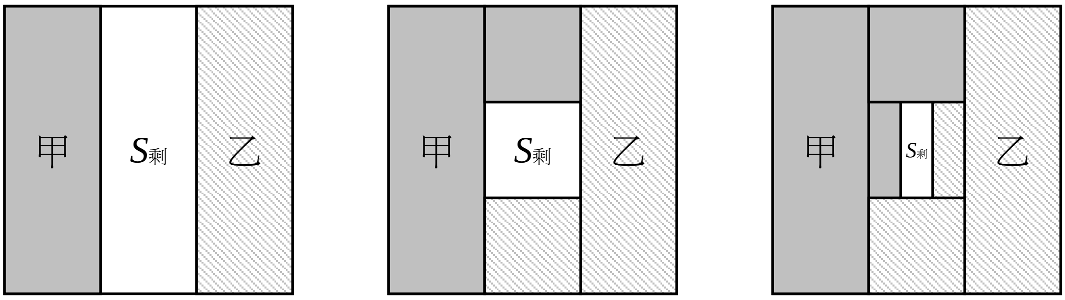

圖　二

3. 當 $k=4$ 時，即證明 $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{4^n}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{3}$

我們同樣設法構造對應於各項的圖形面積如下（參照圖三）：取一個單位面積的矩形，將其均分爲四部分，分別記爲甲、乙、丙和 $S_{剩}$，則每一部分的面積爲 $\frac{1}{4}$，然後再將 $S_{剩}$ 再均分爲四部分，每一部分的面積爲 $\frac{1}{16}$，將其中三部分別給甲、乙與丙，繼續使用這種分割分配方法，則 $S_{剩}$ 的面積遞減趨於 0，甲、乙與丙的面積相等且遞增趨於 $\frac{1}{3}$，而且

$$S_{甲}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots=\frac{1}{3}\text{。}$$

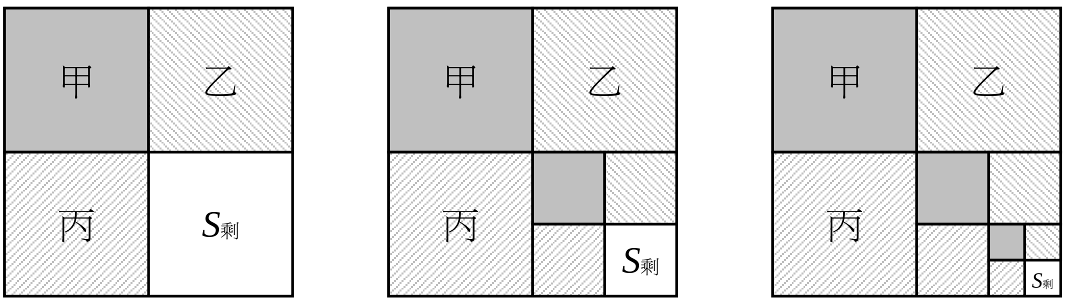

圖　三

一般地，對於 $S=\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{k^n}+\ldots\ldots=\frac{1}{k-1}$，可構造對應於各項的圖形面積如下（參照圖四）：取一個單位面積的矩形，將其均分爲 k 部分，分別記爲 S_1、S_2、……、S_{k-1} 與 $S_{剩}$，則每一部分的面積爲 $\frac{1}{k}$，然後再將 $S_{剩}$ 均分爲 k 部分，每一部分的面積爲 $\frac{1}{k-1}$，將其中 $k-1$ 部分別給 S_1、S_2、……、S_{k-1}，繼續使用這種分割分配方法，則 $S_{剩}$ 的面積遞減趨於 0，S_1、S_2、…、S_{k-1} 的面積相等且遞增趨於 $\frac{1}{k-1}$，而且

$$S_{甲}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{k^n}+\ldots\ldots=\frac{1}{k-1}\text{。}$$

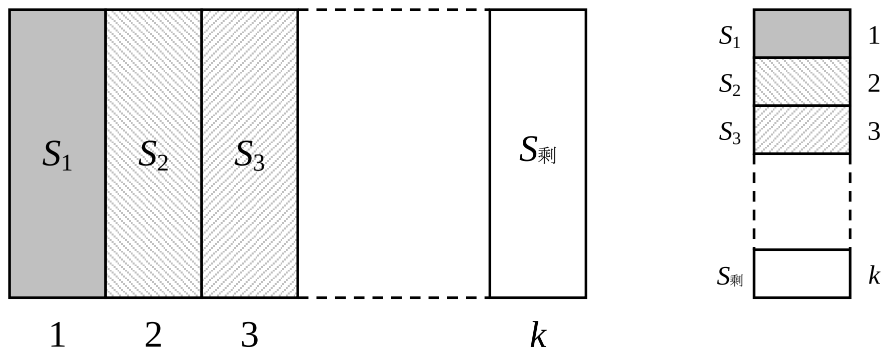

圖　四

二、$q=\frac{p}{m}$（p、m 互質，且均為自然數）

顯然，照搬上面的方法行不通，需要對上面的方法進行改進，現以 $q=\frac{3}{5}$ 爲例進行構造（參照圖五）：

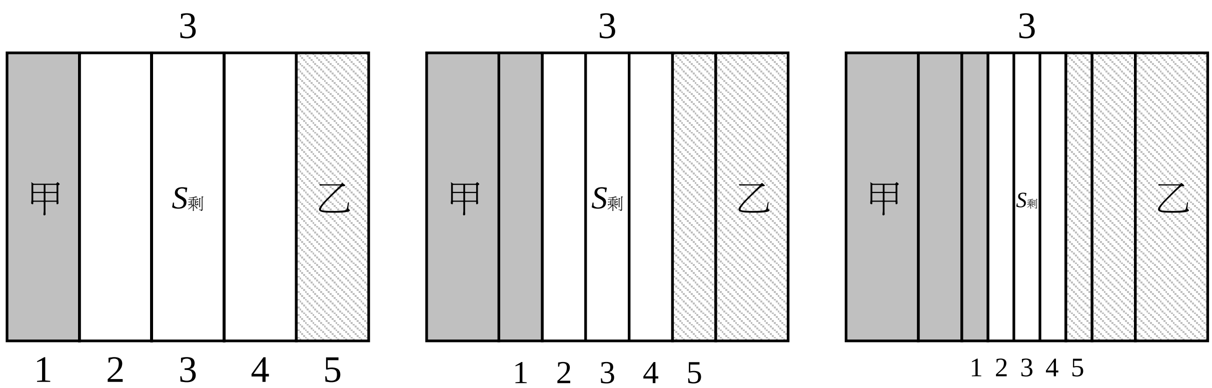

圖　五

取 3 個單位面積的矩形，均分爲 5 部分，每一部分爲 $\frac{3}{5}$，取出其中 2 部分（爲何只取兩部分呢？是根據甚麼確定的？）記爲甲、乙，剩餘 3 部分合記爲 $S_{剩}$，然後將 $S_{剩}$ 再均分爲 5 部分，每一部分爲 $\frac{9}{25}$，其中兩部分

別給甲與乙，剩餘三部分仍然合記為 $S_{剩}$，繼續這種分割分配方法，則 $S_{剩}$ 遞減趨於 0，甲與乙的面積相等且遞增趨於 $\frac{3}{2}$，而且

$$S_{甲}=\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3}{5^n}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\text{。}$$

一般地，對於 $S=\frac{p}{m}+\left(\frac{p}{m}\right)^2+\left(\frac{p}{m}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{p}{m}\right)^n+\cdots\cdots=\frac{p}{m-p}$，可構造對應於各項的圖形面積如下（請自己試著畫出構造圖形）：

取 p 個單位面積的矩形，將其均分為 m 部分，其中 $m-p$ 個部分的面積分別記為 S_1、S_2、…、S_{m-p}，每一部分的面積為 $\frac{p}{m}$，剩餘的 p 部分合在一起記為 $S_{剩}$，其面積為 $\frac{p^2}{m}$，然後再將 $S_{剩}$ 均分為 m 部分，每一部分的面積為 $\frac{p^2}{m^2}$，將其中 $m-p$ 部分別給 S_1、S_2、…、S_{m-p}，剩餘的 p 部分再合在一起記為 $S_{剩}$，繼續使用這種分割分配方法，則 $S_{剩}$ 的面積遞減趨於 0，S_1、S_2、…、S_{m-p} 的面積相等且遞增趨於 $\frac{p}{m-p}$，而且

$$S_{甲}=\frac{p}{m}+\left(\frac{p}{m}\right)^2+\left(\frac{p}{m}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{p}{m}\right)^n+\cdots\cdots=\frac{p}{m-p}\text{。}$$

三、$q=-\frac{p}{m}$（p、m 互質，且均為自然數）

這時需要將上面的方法再作進一步改進（參照圖六），這裏不再舉例。

一般地，無窮項和 $S=-\frac{p}{m}+\left(-\frac{p}{m}\right)^2+\left(-\frac{p}{m}\right)^3+\cdots\cdots+\left(-\frac{p}{m}\right)^n+\cdots\cdots$ $=-\frac{p}{m}+\left(\frac{p}{m}\right)^2+\left(-\frac{p}{m}\right)^3+\cdots\cdots+(-1)^n\left(\frac{p}{m}\right)^n+\cdots\cdots=-\frac{p}{m+p}$，可構造對應於各項的圖形面積如下：取一個面積為 $\frac{p}{m}$ 的矩形，均分為 m 部分，每一部分的面積為 $\frac{p}{m^2}$，其中 $m-p$ 部分面積合在一起記為 A，則 $S_A=\frac{p}{m}-\frac{p^2}{m^2}$，剩餘的 p 部分合在一起記為 B，則 $S_B=\frac{p^2}{m^2}$，然後再將 B 均分為 m 部分，取出其中的 p 部分記為 P，則 $S_P=\frac{p^3}{m^3}$，將 P 給予 A，則 $S_A=\frac{p}{m}-\frac{p^2}{m^2}+\frac{p^3}{m^3}$，$S_B=\frac{p^2}{m^2}-\frac{p^3}{m^3}$；將 P 再均分為 m 部分，取出其中的 p 部分再記為 P，則 $S_P=\frac{p^4}{m^4}$，將 P 給予 B，則 $S_A=\frac{p}{m}-\frac{p^2}{m^2}+\frac{p^3}{m^3}-\frac{p^4}{m^4}$，$S_B=\frac{p^2}{m^2}-\frac{p^3}{m^3}+\frac{p^4}{m^4}$；繼續使用這種分割分配方法，則 S_P 的面積遞減趨於 0， S_A

$= \frac{p}{m} - \frac{p^2}{m^2} + \frac{p^3}{m^3} - \frac{p^4}{m^4} + \ldots\ldots$，$S_B = \frac{p^2}{m^2} - \frac{p^3}{m^3} + \frac{p^4}{m^4} - \ldots\ldots$，我們可以發現，$S_A = S_B \times \frac{p}{m}$，且 $S_A + S_B = \frac{p}{m}$，它啓發我們進行如下構造：將 m 個面積爲 $\frac{p}{m}$ 的矩形合在一起，其面積爲 p，其中包括 m 個 S_A，m 個 S_B，而 $m\,S_B = p\,S_A$，所以，$p = m\,S_A + p\,S_A = (m + p)\,S_A$，即

$$S_A = \frac{p}{m} - \frac{p^2}{m^2} + \frac{p^3}{m^3} - \frac{p^4}{m^4} + \ldots\ldots = \frac{p}{m+p}\ 。$$

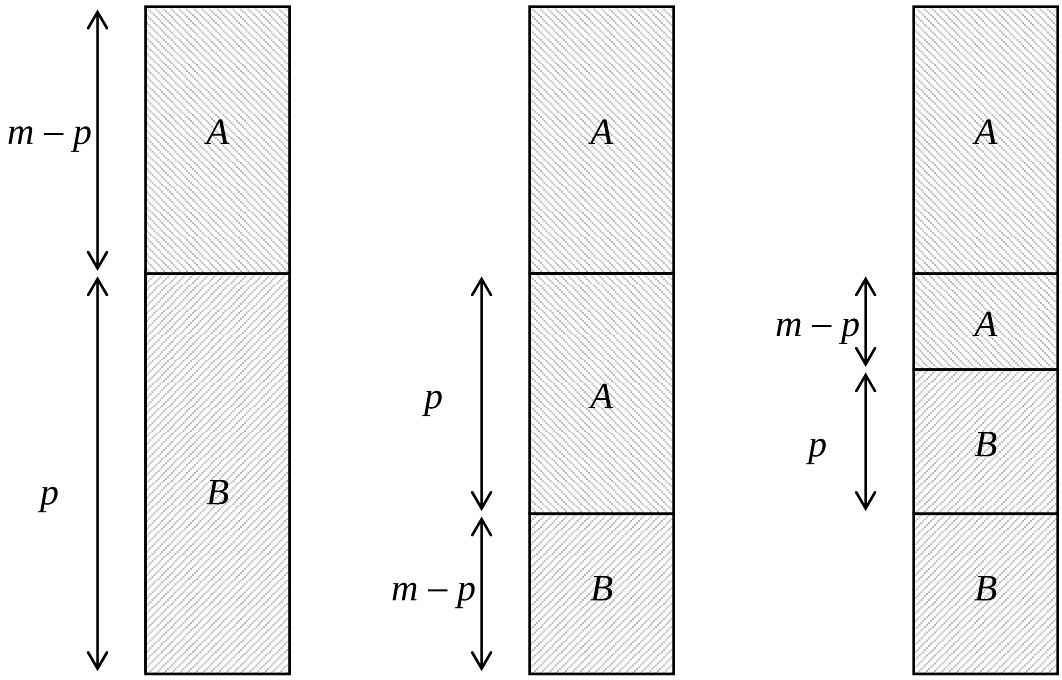

圖　六

當 $a_1 = aq$ 時，只要讓矩形的面積爲 a，構造方法與上面相同。

當數列的第一項爲 a_1 時，只要讓矩形的面積爲 $|\,a_1\,|$，並在旁邊再添加一個面積爲 $|\,a_1\,|$ 的矩形，其他構造步驟同上。

這樣，我們就用構造方法證明瞭無窮遞縮等比數列 $a_n = a_1 q^{n-1}$（$a_1 \neq 0$，$0 < q < 1$，q 爲有理數）的所有項和 $S = \dfrac{a_1}{1-q}$，其構造過程像是「若干個人在均分一塊若干面積的土地」，是不是很有趣？