最大公因數和最小公倍數：以線段表示開創教學空間

葉嘉慧
香港浸信會聯會小學
馮振業
香港教育學院數學系

緒論

香港新小學數學課程於 2002 年開始推行，其中質數概念被移至增潤部分（香港課程發展議會，2000），引致以質因數分解法求公因數和公倍數的方法隨之消失，剩下的就只有列舉法了。在此之前的課程，小四介紹了列舉法，小六再引入質因數分解法，可算是一種深化學習的課程佈置（香港課程發展委員會，1983；香港課程發展議會，1995）。然而，在教學實踐的層面看，在家長督促之下，也有「未學行，先學走」的小四學生，一知半解地用起短除法求最大公因數和最小公倍數來，頗使人頭痛（馮、郭，1997）。

質數概念的重要性，在於它容許所有大於 1 的整數，唯一地因子分解成質數的乘積（算術基本定理），使大部分關乎正整數乘法組合的問題，得以透過化為基本組成單位（即質數）而有系統地解決。可惜現時推行的新小學數學課程並未珍而重之，更糟的是，於 2001 年開始推行的香港新中學數學課程也沒有提及（香港課程發展議會，1999）。換言之，如果小學不教增潤課題，唸畢這兩個新課程的中五學生，可以對質數一無所知的，是否笑柄只有由公眾判斷。如果純從學理考慮，中學生學多項式亟需依靠平行的整數運算為基礎。一個不曾對正整數進行質因數分解的中學生，在學習徹底因式分解多項式時會否產生障礙，有待研究核實。無論如何，這種擔心絕非杞人憂天。

為了解決眼前因刪去了質數導致的「沒有便捷的方法計算最大公因數和最小公倍數」問題，筆者等大膽建議以線段表示引入輾轉相除法（或稱歐氏算法）求最大公因數，並把它推廣至求最小公倍數的法門。

《原本》的啟示

以輾轉相除法求最大公因數古已有之，例如中國古籍《九章算術》方

田章第六問後的術文便載有以下的運算程序：

> 「可半者半之，不可半者，副置分母子之數，以少減多，更相減損，求其等也，以等數約之。」（白，1983，15 頁）

在西方歐幾里得的《原本》卷七及卷十都有提到這個算法，所不同的，是當中用了線段長度表示數的大小。卷七命題一是這樣描述這個算法的：

> 「設有不相等的二數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直作下去，若餘數總是量不盡其前個數，直到最後的餘數為一個單位，則該二數互質。」（藍、朱，1992，182 頁）

當某數量盡它前面的數時，歐幾里得就在卷七命題二中利用線段拼量證明了這數就是初始兩數的最大公因數。

基於歐幾里得的表述方式，輾轉相除法便有了實物操作的具體對應，也開啓小學課堂教學的眾多可能。以下介紹的，是透過線段拼量，推導以輾轉相除求最大公因數的方法。更進一步的，可以把此法深化爲求最小公倍數的方法，最後還會得出兩數乘積等於兩數的最大公因數和最小公倍數的乘積。除特別聲明外，下面討論的所有數量都是正整數，它們對應的線段自然必須是由若干個單位線段拼成。

最大公因數

首先用線段拼砌的方法理解求兩正整數 a_1 , a_2（$a_1 > a_2$）的最大公因數（記作 (a_1 , a_2)）的過程：a_1 , a_2 的公因數就是同時量盡 a_1 和 a_2 的線段。如果考慮以線段 a_2 量線段 a_1，一般而言，便衍生較短線段 a_3（圖 1），而 a_3（$a_2 > a_3$）實爲以 a_2 量 a_1 時餘下的空隙，亦即 a_1 除以 a_2 時的餘數。

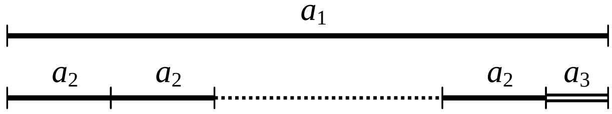


圖 1

能同時量盡 a_1 及 a_2 的線段均能量盡 a_2 及 a_3，反之亦然。因此，a_1 , a_2 的公因數完全與 a_2 , a_3 的公因數相同。由此，可得出以下關於 a_1, a_2 的最大公因數的遞歸計算方法：

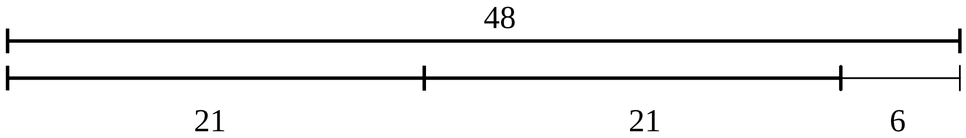
a_1 , a_2 的最大公因數 = a_2 , a_3 的最大公因數

即 $(a_1 , a_2) = (a_2 , a_3)$

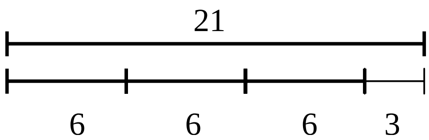
以下例子是通過上述遞歸計算方法求兩數的最大公因數。

例：求 48 和 21 的最大公因數。

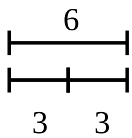
第一步：48 除以 21 的餘數是 6



第二步：轉化為求 21 和 6 的最大公因數，21 除以 6 的餘數是 3



第三步：轉化為求 6 和 3 的最大公因數，3 能整除 6



$\therefore$ (48 , 21) = (21 , 6) = (6 , 3) = 3，48 和 21 的最大公因數是 3。

一般而言，以這種遞歸計算方法，$(a_1 , a_2) = (a_2 , a_3) = \ldots\ldots = (a_n , a_{n+1})$，只要找到 a_{n+1} 能量盡 a_n （即 $(a_n , a_{n+1}) = a_{n+1}$），就知道能同時量盡 a_1 , a_2 , …… , a_{n+1} 各線段中最長的便是 a_{n+1}。又因爲 a_1 , a_2 , …… , a_{n+1} 是嚴格遞降正整數序列，a_{n+1} 的下限是 1，故一定出現 a_{n+1} 能量盡 a_n 的情況。也就是說，這種輾轉拼量的操作必然在有限步內停止。

最小公倍數

我們同樣可以用線段拼砌的方法理解求兩正整數 a_1 , a_2（$a_1 > a_2$）的最小公倍數的過程。

a_1 , a_2 的最小公倍數，記作 $[a_1 , a_2]$，就是線段 a_1 和線段 a_2 分別重複排列時，第一次兩端對齊時的長度（圖 2）。

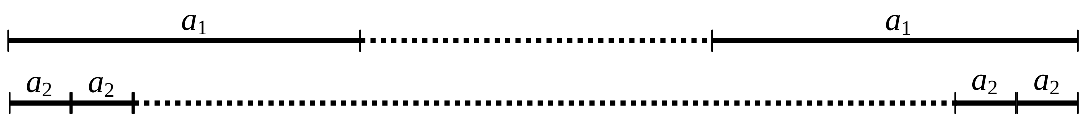


圖 2

同樣地，如果集中考慮以線段 a_2 量線段 a_1，一般而言，便衍生較短線段 a_3（圖 3），而 a_3（$a_2 > a_3$）實爲以 a_2 量 a_1 時餘下的空隙，亦即 a_1 除以 a_2 時的餘數。

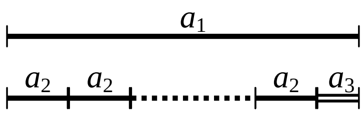


圖 3

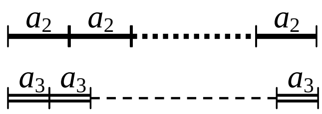


圖 4

要達至 a_1 和 a_2 第一次兩端對齊，必須重複 a_1 若干次，使所衍生的 a_3 的個數（與 a_1 個數相同）剛好能與若干個 a_2 第一次兩端對齊（圖 4）。換言之，a_1 與 a_2 第一次兩端對齊時所需的 a_1 個數，和 a_2 與 a_3 第一次兩端對齊時所需的 a_3 個數相同。

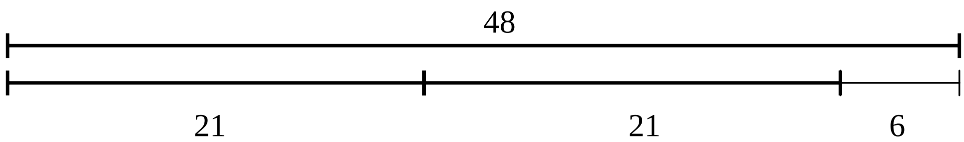
由此，可得出以下關於求 a_1 , a_2 最小公倍數的遞歸計算方法：

$$
\begin{aligned}
a_1, a_2 \text{的最小公倍數} &= a_1 \times a_1 \text{與} a_2 \text{第一次兩端對齊時} a_1 \text{的個數} \\
&= a_1 \times a_2 \text{與} a_3 \text{第一次兩端對齊時} a_3 \text{的個數} \\
&= a_1 \times \frac{a_2, a_3 \text{ 的最小公倍數}}{a_3} \\
[a_1, a_2] &= a_1 \times \frac{[a_2, a_3]}{a_3}
\end{aligned}
$$

以下例子是通過上述遞歸計算方法求兩數的最小公倍數。

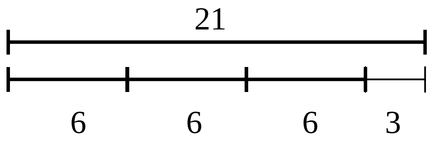
例：求 48 和 21 的最小公倍數。

第一步：48 除以 21 的餘數是 6



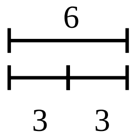
$$[48\,,21] = 48\times\frac{[21,6]}{6}$$

第二步：再求 21，6 的最小公倍數，21 除以 6 的餘數是 3



$$[48\,,21] = 48\times\frac{1}{6}\times 21\times\frac{[6\,,3]}{3}$$

第三步：再求 6，3 的最小公倍數，3 能整除 6



$$\therefore \quad [6\,,3] = 6$$

$$[48\,,21] = 48\times\frac{1}{6}\times 21\times\frac{1}{3} = \frac{48\times 21}{3} = 336$$

一般而言，以這種遞歸計算方法，（$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_n > a_{n+1}$）

$$[a_1\,,a_2] = a_1\times\frac{[a_2\,,a_3]}{a_3} = a_1\times\frac{a_2}{a_3}\times\frac{[a_3\,,a_4]}{a_4} = \ldots\ldots$$

$$= a_1\times\frac{a_2}{a_3}\times\frac{a_3}{a_4}\times\ldots\times\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{[a_n\,,a_{n+1}]}{a_{n+1}}$$

只要找到 a_{n+1} 能量盡 a_n，就知道 $[a_n\,,a_{n+1}] = a_n$，那麼 $[a_1\,,a_2] = a_1\times\frac{a_2}{a_{n+1}}$ 。從前面所知，一定能出現 a_{n+1} 能量盡 a_n 的情況，並得 $(a_1\,,a_2) = a_{n+1}$。

求兩數最小公倍數時，除了可逐步遞歸計算答案外，從以上討論更可發現，只要知道 $a_1\,,a_2$ 的最大公因數，便可求得 $a_1\,,a_2$ 最小公倍數，$[a_1\,,a_2] = a_1\times\frac{a_2}{(a_1,a_2)}$，說明兩數乘積等於兩數的最大公因數和最小公倍數的乘積。

有關以輾轉相除求最大公因數的證明廣見於數論的入門書籍，此處不贅。值得一提的，是有關求最小公倍數的定理。依筆者等所見，大多數是

透過質因數分解法做的。因利成便，也可推導「兩正整數的乘積等於兩數的最大公因數和最小公倍數的乘積」這個定理。或許因爲質因數分解法太方便了，很少有書刻意迴避的，但不表示這定理的證明必須依賴質數概念。只運用因數和倍數的基本性質，再加上輾轉相除法的一些推論，也可以證明上述定理（熊全淹，1985），只是證明較抽象，不易捉摸罷了。相比之下，本文提供的，是一個可以逐步操作的構作性證明，好處是以同一手法（即線段拼砌）貫穿求兩數的最大公因數及最小公倍數的理解，同時毋須依附其他的學習基礎（包括質因數的認識）。像這樣可以使學習變得簡潔和透明的證明，大概也應存在於數學文獻之中，讀者如曾接觸，還望賜示分享。

結語

這個構思曾於小四及小六課堂上作初步測試，有學生確能領略這個遞歸過程，其實是把找某兩數的最小公倍數的問題，化爲求另外兩個較小數的最小公倍數的問題。由於實驗條件欠佳，未能有清楚的結論。然而，教具的局限性，卻清楚地浮現。爲了進行線段拼量，必須能準備很多長度爲不同正整數單位的紙條以供張貼操作。由此衍生的工作量，可不是被擠得透不過氣的教師所能輕易承擔的。如果能借助科技的互動性，定必可爲教學提供高效的平台。儘管如此，這個讓小學生以線段理解輾轉相除法求兩數的最大公因數和最小公倍數的構思，仍然是值得探討的想法。

參考資料

白尚恕（1983）。《九章算術注釋》。北京：科學出版社。

香港課程發展委員會（1983）。《小學課程綱要：數學科》。香港：教育署。

香港課程發展議會（1995）。《目標爲本課程：數學科學習綱要（小四至小六）》。香港：教育署。

香港課程發展議會（1999）。《數學課程綱要（中一至中五）》。香港：教育署。

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

馮振業、郭潔瑩（1997）。〈請莫小覷「最小公倍數」〉，《數學教育》4 期，26 – 28。

刪除: ，

熊全淹（1985）。《初等整數論》。湖北教育出版社。

刪除: 湖北

藍紀正、朱恩寬（譯）（1992）。《歐幾里得幾何原本》。台北：九章出版社。