其實「平面幾何」這一課所講的是甚麼？[1]

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

楔子

雖然筆者已離開中學數學教學前線多年，但間中仍有學生向筆者提問：「其實呢課講 D 乜？」（意即：其實這一課所講的是甚麼？），而提問的往往並非能力稍遜的學生！換言之，他們對於課題中的每一個概念與技巧均已基本掌握但未能看穿整課的全貌。

這個問題往往在重溫該課（甚或準備考試）時出現，所以其處理與第一次施教有所不同。筆者記得許多年前曾先後應邀替兩張暢銷的中英文報章寫會考專欄，當時要在一版左右（約一二千字）概括一課的重點（當然總不能只把相關的公式列出），筆者當時已感到這並非簡單的要求。無論學生或老師，假若能這樣的綜合出全課的圖像，恐怕也可以說能「讀通」該課了。

當然我們首先要看通學生的關心點、他們的「難點」、最易犯錯的地方和他們覺得最難把握的部分。在筆者過往進行的不少研究[2]中顯示，學生很想知道每道公式（或技巧）是怎樣來的（不局限於證明或其歷史根源—是指其原理及如何從過往的課題衍生出來的前文下理，而非從天而降）及如何得到運用（包括何時運用和如何知道甚麼時候要用某道公式）。所以替學生準備考試而重溫課題並不一定只屬於功利掛帥，而理應協助學生在「第二輪」接觸課題時獲得全課的整體認識。

在過往，提升數學學習的方法不計其數，其中一部分是一般性和「務虛」的（筆者並不說其不重要），如引入遊戲、引起動機、自我發現、一般性的問題解決策略等，另一部分又或過於「務實」，逐道公式、逐道歷屆會考題目作出分析。也許從了解一個課題的來龍去脈能補上上面兩者中間的空白。

---

1 作者註： 感謝蕭文強、鄧幹明、黃家鳴、孫旭花諸位所提供的寶貴意見。

2 作者註： 尤以 1998 年香港數學課程全面檢討中由教署批出與林智中、莫雅慈、梁貫成、黃家鳴合作的一項對學生學習數學的研究。

本文筆者隨意選出最近與學生分享的中四平面幾何（圓形）的這個課題，希望用之表達以上的想法。當然這是其中一例，整個做法與課程無關。換言之，縱使將來課程中刪除了這個課題（又或因校本剪裁而決定不教），筆者相信對其他課題作出同樣的整體鈎劃仍是有其作用的。

<u>全課的鈎劃</u>

1. <u>無端端有個圓</u>

當然大部分同學不會考慮爲何在課程上會有「圓」這麼的一課，反正書有這一課，會考要考，就要學了（所以不少學生把數學家痛恨極了：要不是他們發明了這許多數學，我們就不用學那麼多！），不過要談談學圓形的意義其實並不困難。因爲我們對平面圖形的認識從直線圖形（rectilinear figure）開始，最基本的自然是三角形了，這在低年級裏學了不少。利用三角形的性質去研究四邊形亦學過了，而圓形是一個既常見、很「完美」而又是非直線的圖形，於高中時學習也可以說是最自然不過了。

2. <u>共有差不多二十條定理，頭痛極了！</u>

當然大部分教科書已將這十多條公式分門別類，而且不少與另一條互逆，故此實際要懂得的不是想像中那麼多，學生不要給嚇怕了，概括而言：

- 【弦和垂足】首先是關乎弦（chord）和圓心之垂足的：垂足平分弦，反過來亦是：對於同長的弦，垂線長度亦相同，反過來亦是。這便已是所謂四條定理了，又怎會被定理的數量嚇怕？

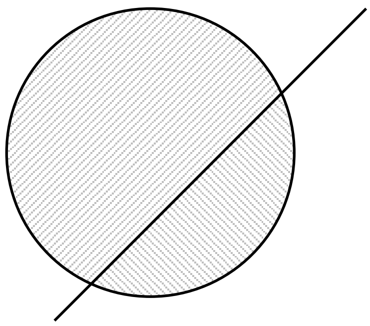


圖 一

(1) 「垂線平分弦」（perpendicular bisects chord）

(2) 「等弦對等弦心距」（equal chord, equal distance from centre）

- 【角在圓內的「走動」】之後便是關於角的性質，是用得比較多的。在看這些性質之前，首先要清楚「弓形」（segment）的觀念，一條弦可看成將圓割成兩個弓形。此外，就是「同弧 ⇒ 同角 ⇒ 同弦」的性

質了。在同一個弓形，圓周角相等（angle in the same segment），因爲都等於圓心角的一半。半圓形成直角只爲上面的特例。這又「了斷」了好幾條定理了！

(3) 「等弦對等圓心角，等圓心角對等弧」
（equal arc, equal angle, equal chord）

(4) 「同弧上的圓周角相等」（angle in same segment）

(5) 「圓周角 $= \frac{1}{2}$ 圓心角」
（angle at centre = twice angle at circumference）

(6) 「半圓上的圓周角是直角」（angle in semi-circle）

- 【弧長】涉及弧長的性質不多，除了上面所說之外，就是弧長與圓心角成正比（這可聯想到鐘面上，時針針端所行距離與所劃過之角成正比）而由於圓心角是圓周角之兩倍，弧長與圓周角亦成正比。但要注意弦長沒有這個性質，這可與三角學所學類比一下：弧長 $= r\theta$，故與 θ 成正比（這裏只說類比，不是說用三角學知識「証明」上面性質），但弦長卻與 $\sin\theta$ 有關，故不會成正比。

(7) 「等弧對等圓心角」（arc length and angle in proportion）

- 【共圓四邊形】之後便是一些有關共圓四邊形（cyclic quadrilateral）的性質，這其實是同弓形圓周角相等之延伸。共圓四邊形就是由不同弓形的兩個圓周角所形成。同一弓形時相等、不同弓形（alternate segment）時互補（圖二）。至於涉及外角（exterior angle）的只是這個性質稍稍變化吧了。當然還有這些定理之「逆定理」。

(8) 「圓內接四邊形對角互補」
（opposite angles of cyclic quadrilateral are complementary）

(9) 「圓內接四邊形外角等於內對角」
（angle of cyclic quadrilateral equals opposite exterior angle）

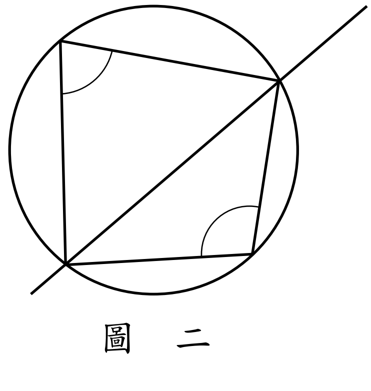


圖　二

- 【切線】最後就是關於切線的三個主要性質，一個涉及圓上切線：切線觸點既爲圓心垂足，此外就是圓外的兩條切線「地位」對稱，亦即形成了兩個對稱又全等的直角三角形（圖三）。最後就是「在相對弓形的圓周角」（angle in alternate segment）了，我們可以用上述「弦將圓割成兩個弓形」的想法協助了解：如圖四，「右邊」弓形與切線形成的角與「左邊」弓形的任一圓周角相等。

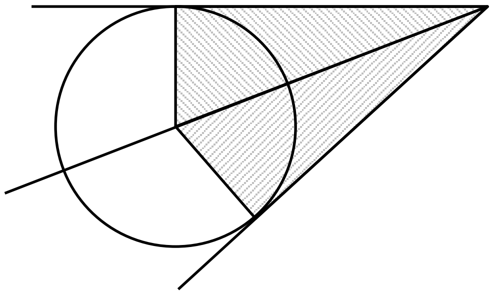


圖　三

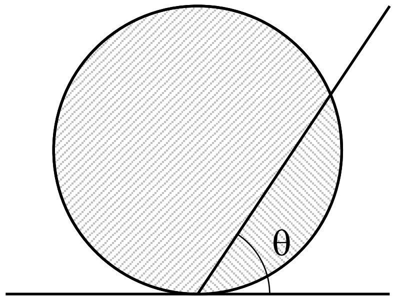


圖　四

(10) 「切線判定定理：經過半徑的外端而且垂直於該半徑的直線是圓的切線」（tangent perpendicular to radius）

(11) 「切線長定理」（tangent from external point）

(12) 「在相對弓形的圓周角」（angle in alternate segment）

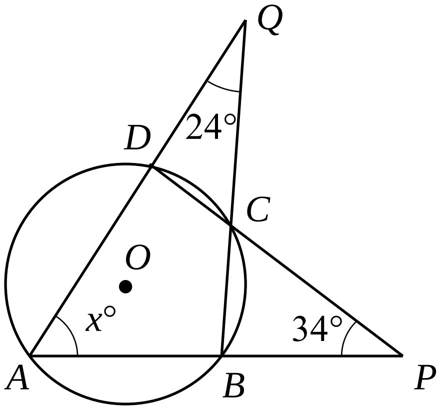
以上便是關於圓的主要性質，當然還有其他次要的。

3. 定理分了類又如何？

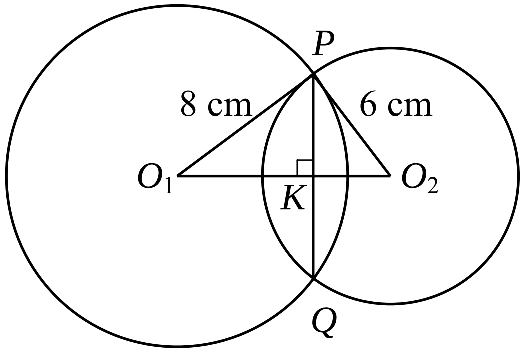
要成功的解數學題，最重要便是要了解每組性質在解決問題中的作用。做到這點，其實這些定理也不需要太辛苦的強記；否則，在某個意義下，記了也沒用。

我們首先可以觀察到，一般來說，我們要解數學題的整個圖形是全部確定了的。但一些題只涉及角，由已知的角便可找到未知的角，例如圖五便是了。準確來說，這個圓是不完全確定的：我們可隨意的將整個圖形放大縮細，不會影響這道題目。對於這類題目，動用一些與角有關的性質，就足以由已知的角逐一找未知的角（上面所說的所謂「走動」）。

至於涉及長度的問題（如圖六），就非動用一些與長度有關的性質不可了，因爲只用角的性質較難得出長度。例如涉及弦長的性質，甚或畢氏定理或相似／全等三角形、又或等腰三角形等。



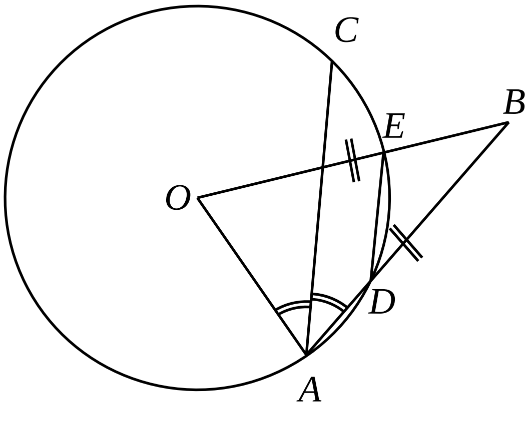
圖五：求x。



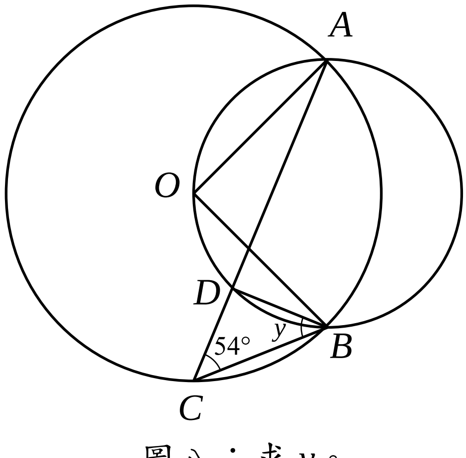
圖六：$O_1O_2 = 10$ cm，求PQ。

此外，當圖的結構複雜時，要小心留意一些角是否真的是圓周角（是哪個弦的圓周角？又是哪個圓的圓周角？）和一些線段是否真的是弦，例如圖七中，*OAD* 便不是一個圓周角（起碼不是圖中那個圓的圓周角—雖然 *A* 位於圓周）；*CAD* 雖然是（弧 *CD* 的）圓周角，但若真的要動用有關性質，就相等於要加 *CD* 這條補助線，這又是否我們想走的一步呢？

圖八中便有不同的圓周角和圓心角，但要攪清楚屬於哪一個圓的了。



圖七：$OB = AB$，證 $DE \,//\, AC$。



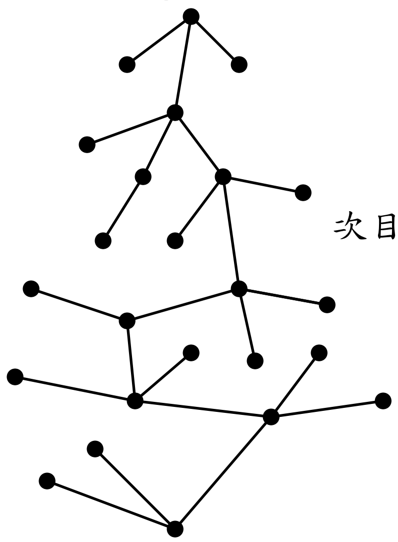
圖八：求 y。

4. 從已知到未知、又由「需要找哪些未知」倒過來想

數學的問題解決多姿多采，不一定從已知出發「線性」去求未知，或由未知追溯回已知的。不過從已知找出通向未知往往都是問題解決的基本功 [3]。以圖五為例，已知的除了 24° 和 34° 外，其實「圓」、「圓心」、「三角」都是一些已知。無論如何，我們總會想到由 24° 和 34° 出發求其他未

3 作者註： 見黃毅英 (1990)。解題與數學教育。《數學傳播》54 期，71 – 81。後載《邁向大眾數學的數學教育》。台北：九章出版社。

知的角，如果我們估計我們會動用圓的性質，我們總要把 24° 和 34° 連繫到圓來，所以我們自然的想法是先利用三角形內角和求 $\angle BCA$（有興趣者請自行繼續）。



圖九：由已知通往未知的路

又以圖六爲例，要求 PQ，也即求 PK（因垂足分半），故可設 $PQ = 2x$ 或 $PK = x$，這便是由未知倒過來的一例。當然有些同學會記得圖十這個典型，就知其中的三個三角形均爲相似。

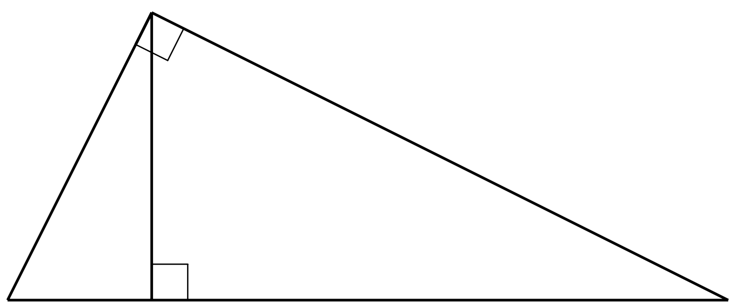
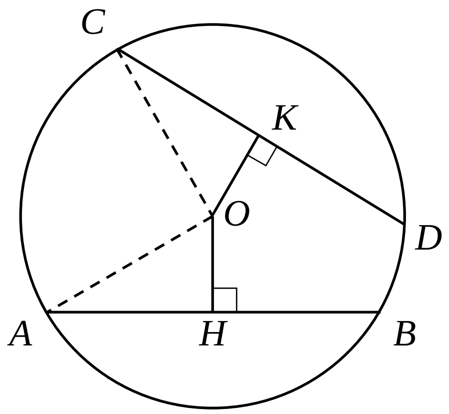


圖　十

5. 圖上思路與表達

不少同學一見到證明甚或任何幾何題均馬上用「兩行」（two columns）之形式處理（例如圖十一）。首先證明不一定用「兩行」形或表達，亦不一定要用標準的理由（當然用標準的理由比較方便）。不過中學學到簡單幾何題可利用幾何圖進行思考（diagram tracing），就如 Pólya 所說的，先設計一個解決方案才逐步執行，圖十二便是一例。

定理四十五：同圓中若有兩弦與圓心等距，則其長度必等。



已知　一圓，圓心 O，兩弦 AB、CD。由 O 至 AB、CD 之垂線 OH、OK 相等。

求證　$AB = CD$。

作圖　聯 OA、OC。

證明　ΔOHA 及 ΔOKC 中，

OH	=	OK	已知
OA	=	OC	同圓半徑
$\angle OHA$	=	$\angle OKC$	已知直角

$\therefore$　Δs OHA, OKC 全等　RHS

$\therefore$　$AH = CK$

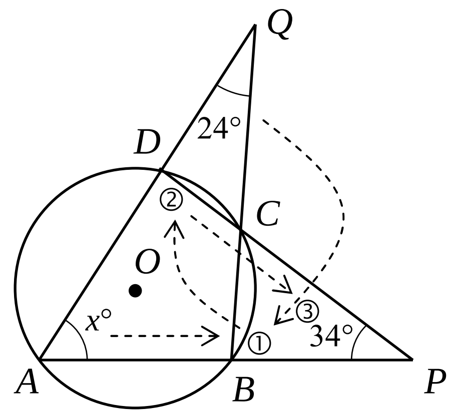
因由圓心至圓上一弦之垂線必平分該弦，

$AH = \frac{1}{2}AB$ 及 $CK = \frac{1}{2}CD$

$\therefore$　$AB = CD$

圖十一：取自 C. V. Durell "*A New Geometry for Schools*"

中譯本《杜勞新編幾何》（譚毅成譯），1963 年天利行出版，頁 354。



圖十二：（①: $\angle CBP = 24° + x°$）

結語

當然上面所說的只是幾何的一些基本功了，數學題往往千變萬化，所以不是說，用上面招數就可套用到所有幾何題。上面爲大家分析的雖然有一般性的問題解決策略，但盡量希望投射到平面幾何這個特定課題。反過來，中間所談到有關具體的教學內容，其實亦是希望描述如何勾劃一課的通則。例如「無端端有個圓」一節便是本課與以往學習之關係，而「共有差不多二十條定理，頭痛極了！」一節便是整課知識內容的脈絡。最後讓筆者引用《斯蓋尼三氏解析幾何學》（New Analytic Geometry by Smith, Gale & Neelley，邱調梅譯，中流出版社有限公司出版）的中譯者序作結：「學習一般數學之要點，爲方法，理論與思考，解析幾何學，亦然。方法爲技術上問題，熟後方能生巧，此習題之所以不能不勤作也。理論爲數學之精華，凡一定律或一定理當前，必須細究其理。是否全部明瞭？如若尙有疑點，必須時加應用。切不可徒事強記，以免食而不化。理論或應用題，須時加思考，務使觸類旁通，得心應手，方稱善讀。總之：天資雖有高下，成功端賴努力，更毋一暴十寒，則成績斐然，可預卜也。」