

「博奕論」淺介

吳端偉
香港大學數學系

Game Theory 一般翻譯為「博奕論」，也有人把它譯作「對策論」。在 1944 年，馮·諾曼 (von Neumann) 和摩根斯坦恩 (Morgenstern) 合作出版了《博奕論和經濟行爲》(*The Theory of Games and Economic Behaviour*)，這標誌著博奕論研究的開始。今日「博奕論」已被廣泛應用於招標、國際貿易、選舉、公共政策等等的經濟及社會科學問題上。在 1994 年，瑞典皇家科學院諾貝爾獎委員會把經濟獎頒予納殊 (John Nash) 和另外兩位「博奕論」學者，以表揚他們對「博奕論」所作出的奠基性貢獻。

「博奕論」研究每一個決策者將如何根據其他對手的選擇，去作出最有利自己的選擇。爲了進一步說明「博奕論」，讓我們首先介紹納殊的論文導師塔克 (A.W. Tucker) 所構造的一個著名和重要的例子：囚犯困境 (Prisoner's Dilemma)。

警方抓到了兩名準備持械行劫的疑犯，但沒有掌握到足夠的証據，於是警方把他們分別單獨囚禁起來，要求他們交代藏械原因。如果他們都承認有行劫的意圖，每人將被判入獄 3 年；如果他們都不承認，就由於証據不足，他們將各自被判入獄 1 年；如果一個否認而另一個承認並且願意作証，那麼否認的將被判入獄 5 年，而承認者則獲釋放。這樣，兩個疑犯面臨的對策格局如下 (見表一)，每個格子中左邊的數字是甲的刑期，右邊是乙的刑期。

		乙	
		承認	否認
甲	承認	3, 3	0, 5
	否認	5, 0	1, 1

表 一

從上表，不難看出，無論乙選擇承認或否認，「承認」都會是甲的較佳策略。這種策略就是所謂的「優勢策略」(dominant strategy)，類似地，「承

認」也是乙的優勢策略。假設甲和乙都是理性的，那麼他倆一定都會選擇「承認」這個優勢策略，而我們將可推斷出他們都會被判入獄 3 年。

「囚犯困境」這例子之所以重要，是因為有很多經濟學現象都可以用它來說明，例如甲報與乙報正考慮是否進行減價戰。它們各自的策略與相應的利潤（以千萬為單位）如下（見表二）。

		乙	
		減價	不減價
甲	減價	1, 1	3, 0
	不減價	0, 3	2, 2

表 二

只要細心觀察，便不難發現「囚犯困境」和「報紙減價戰」這兩個例子有著同一樣的結構。在兩個例子裏都有兩個決策者： A 與 B ， A 跟 B 都有兩個選擇： C 與 D 。這裏 A 可以代表甲犯或甲報， B 可以是乙犯或乙報； C 代表「承認」或「減價」，而 D 則可以是「否認」或「不減價」。如果 (X, Y) 代表 A 選擇 X 而 B 選擇 Y ，則在前面兩個例子裏， A 對選擇結果的優先次序是： $(C, D) > (D, D) > (C, C) > (D, C)$ 。而 B 對選擇結果的優先次序是： $(D, C) > (D, D) > (C, C) > (C, D)$ 。從我們對「囚犯困境」的分析，我們知道 A 與 B 將同時選擇策略 C ，把這個結果應用到「報紙減價戰」裏，甲報和乙報都會同時選擇減價，一場減價戰便勢所難免了。

在「囚犯困境」裏，每個疑犯都會選擇承認這個優勢策略。（承認，承認）則是所謂的「優勢策略均衡」（dominant strategy equilibrium），如果一個對策格局存在優勢策略均衡，那麼每個局中人將依從這個均衡去作選擇，我們因而可以推斷出他們的行為。可惜的是，在大部份對策格局裏，優勢策略均衡並不存在。這使很多對策格局都難於分析。為此，納殊在他那只有 27 頁的博士論文裏，引入了一個比「優勢策略均衡」更一般的均衡概念，這就是著名的「混合納殊均衡」（mixed Nash equilibrium）。納殊並且證明在大多數情況下，「混合納殊均衡」必定存在。

在解釋何謂「混合納殊均衡」之前，讓我們先了解納殊均衡的定義。納殊均衡可以理解為「所有決策者皆不會獨自改變他們已選擇的策略組合

(strategy portfolio)」。舉例說，在一堂很沉悶的課上，學生可選擇早退或繼續留下聽課，可是早退會令學生在老師心目中留下壞印象，故沒有人希望自己在老師面前成為第一位早退的學生。在這個情況下，所有人都選擇「繼續留下」。這正是一個納殊均衡，因為不會有人願意單獨將「繼續留下」改變成早退。我們再看另一個例子，十位同事一起吃晚飯，各人可以選擇分別 50 元的普通套餐或 80 元的超級套餐，最後以平均分賬的方法付款(即將總數除以 10)。如果每人都選擇 50 元的普通套餐，顯然這並非納殊均衡，因為當其中一位知道別人都選擇 50 元的套餐，自己就會選 80 元的超級餐，因為分賬的方法使他可以以 53 元就能享用 80 元的超級餐。

電影《有你終生美麗》(*A beautiful mind*) 虛構了一幕情節用以說明納殊是如何想出納殊均衡這個概念。納殊跟四位男同學在酒吧裏喝酒，酒吧的另一邊有一個金髮美女正與四位女孩子在聊天。如果五個男孩子都去追求那個金髮美女，那麼將只有一人成功。當其餘四位失敗而歸後，再轉而追求自己心目中的次選時，女生因知道自己不是在追求者心中的首選，便會倒氣的拒絕其追求者；這四位男生因而沒法覓得女伴。在電影裏，納殊建議大家一開始就追求彼此心中的次選，這樣一來大家找到女伴的機會便大大提高。可是「所有人皆選擇次選」這個策略組合其實並不是納殊均衡，因為當有人確定其餘四人都不會追求那位金髮美女時，他就必定會轉去追求那位金髮美女。

要了解何謂「混合納殊均衡」，就必先要知道什麼是「混合策略」，我們可以藉著以下的遊戲去瞭解它。這遊戲有三位參與者及一位公正人。遊戲開始時，參與者需一同豎起手指，他們可選擇豎起一隻或兩隻手指。唯一豎起一隻手指的人將獲公正人發放一元的獎金，而唯一豎起兩隻手指的則可獲兩元獎金，除這兩情況外，參與者將不會獲得任何獎金。你能找出這個遊戲的所有納殊均衡嗎？如果重覆這個遊戲多次，那麼每人將需要決定豎起一隻或兩隻手指的百分比，好使自己可以獲得多些獎金。這個百分比，如 30 % 的時間豎一隻，70 % 的時間豎兩隻，就是所謂的「混合策略」。對於混合策略，我們亦考慮相應的納殊均衡，這就是「混合納殊均衡」。可以計算出這個遊戲的「混合納殊均衡」是每人都選擇約 40 % 時間豎起一隻手指，60 % 時間豎起兩隻手指。

「混合納殊均衡」是「博奕論」裏的一個重要概念，它也被應用到「演

化生物學」(evolutionary biology) 上來解釋生物演化的現象，例如為何不同物種的雌雄比例總是約一比一的。