

# 數學素質透視

李漢龍

瀋陽建築工程學院基礎部

數學素質的內涵是什麼？目前尚無統一認識。本文從「天賦因素」和「環境因素」對數學素質作一透視。

## 1. 數學素質的要素

所謂數學素質，是一個內涵豐富的說法，涉及到數學語言、數學意識、數學思維與數學能力等。結合國內外數學教育界對數學素質的一些新提法，作者認為：數學素質是人類在先天遺傳基礎上，主要是通過後天的學習所獲得的數學語言、數學意識、數學思維和數學能力等的總稱，是一種穩定的心理狀態，同時又是一個歷史範疇。其內涵將隨著數學科學的不斷發展而得到豐富和完善。下面從四個方面加以闡述。

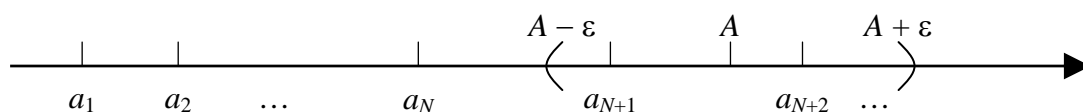
### 1.1. 數學語言

作為一種科學的語言，數學也是科學交流中不可缺少的工具，數學素質應包括能初步運用這種簡約、準確的語言的能力。「數學語言是數學思維的載體，是解決問題的工具」，離開了數學語言是無法學習與交流數學思維的。沒有嫻熟的數學語言，要提高數學思維能力是不可思議的。數學語言包括文字語言、符號語言與圖像語言三種。

例如，數列極限概念。用文字語言表述為：對於數列  $\{a_n\}$ ，如果當  $n$  無限地增大時， $a_n$  無限地接近於常數  $A$ ，則稱  $\{a_n\}$  以  $A$  為極限。用符號語言表述為：

$$\forall \varepsilon > 0, (\exists N) \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

這種形式的語言，就能更好地滿足數學思維的需要。用圖像語言表述為：



圖像語言可以看作視覺語言，它可以作為符號語言的補充，為數學思維提供直觀的模型。三種數學語言中，運用得最多的是符號語言。

## 1.2. 數學意識

數學意識是數學素質的重要組成部分。它包括兩個方面：一是數學的基本知識；二是將實際問題化為應用數學問題，運用數學方法描述處理現實世界問題的應用數學的意識。數學意識這兩個方面的內容決定了它的特點 (1) 不可改變性：數學的基本知識是固定的，不能隨意改變。(2) 個體差異性：即不同的人對數學知識的掌握和領會不盡相同，從而對於運用數學知識描述處理現實世界問題的能力也不盡相同，故而數學意識也不盡相同。從下面兩個例子中能看到這種差異：

例 1<sup>[2]</sup> 地球赤道周長  $C = 4$  萬 km，設想先用鐵絲把赤道捆緊，然後把鐵絲接長 10 m，問鐵絲和地面之間能出現多大空隙？

一般人回答：不會有多大空隙。或有空隙也不大，難以覺察。然而都不對。可以這樣思考：設地球赤道周長  $C = 2\pi R$ ，鐵絲接長後周長

$$C + 10 = 2\pi R' \Rightarrow 10 = 2\pi(R' - R) \Rightarrow R' - R = \frac{5}{\pi} \approx 1.6 \text{ m}$$

即地球赤道周長增加 10 m，其半徑將增加約 1.6 m，中間的空隙可以沿赤道站一圈身高 1.6 m 的人呢！

例 2<sup>[2]</sup> 一張紙厚 0.1 mm，假如把它對折 100 次一共有多厚？

一般人回答：「大約有數米或數十米吧。」然而不對。實際上，一張紙對折 1 次有 2 張厚；對折 2 次，有 4 張厚……，對折 100 次有  $2^{100}$  張紙厚。那麼  $2^{100}$  張紙能有多厚呢？不妨計算一下：

$2^{10} = 1024 \approx 10^3$  則  $2^{100} = (2^{10})^{10} \approx 10^{30}$  故  $2^{100}$  張紙厚度是  $10^{30} \times 0.1 \text{ mm} = 10^{26} \text{ m} = 10^{23} \text{ km}$ 。可別小看這個數，地球周長只有  $4 \times 10^4 \text{ km}$ ，地球與太陽的距離也只有  $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ，1 光年是  $10^{13} \text{ km}$ ，因而  $10^{23} \text{ km}$  等於 100 億光年。

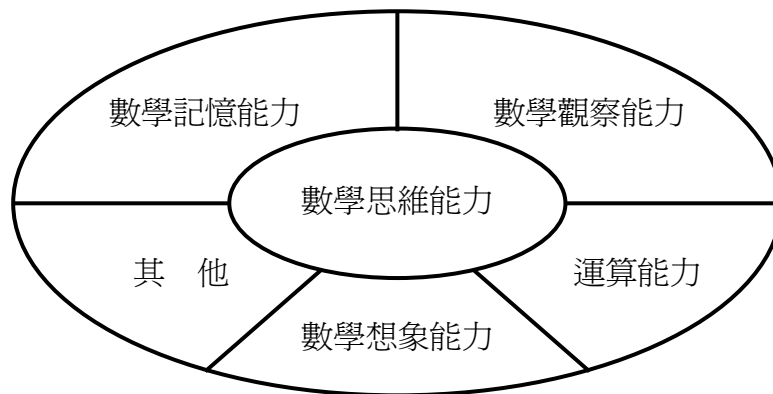
## 1.3. 數學思維

「所謂數學思維，就是以數學問題為載體，通過發現問題、解決問題

的形式，達到對現實世界的空間形式和數量關係的本質的一般性認識的思維過程。」<sup>[1]</sup> 它是人腦利用數學符號或語言、通過抽象概括等方法、對數學物件間接概括的反映過程。具體來說，數學思維是以數學概念為細胞，通過數學判斷和數學推理的形式揭示數學物件的結構和內在聯繫的認識過程。數學思維具有一般思維的特徵，也具有自身的個性特徵：即思維的深刻性、廣闊性、靈活性、目的性、敏捷性、批判性等。

#### 1.4. 數學能力

數學能力是人們在從事數學活動時所必須的各種能力的綜合，是最重要的數學素質。數學思維能力是數學能力的核心。數學能力由運算能力、空間想象能力、數學觀察能力、數學記憶能力和數學思維能力等組成，可用下圖表示：



數學能力結構示意圖

#### 2. 數學素質的天賦因素

考慮數學素質的天賦因素即考慮數學素質是否具有遺傳性。科學已經證明，人的生理素質是遺傳的，然而數學素質究竟有沒有遺傳性，還是一個未知數。美國心理學家斯坦萊·霍爾說了這樣一句頗有爭議的話：「一兩的遺傳勝過一噸的教育。」它把遺傳與數學素質的密切關係揭示了出來。數學家應該算是具有數學素質的人吧，但令人遺憾的是，大部分數學家的父母似乎不具有數學素質，甚至於有的數學家的父母根本不懂數學。但是也有個別情況存在：

(1) 中國數學家陳建功的後輩中從事數學工作的有：陳翰激，中國科學院數學所研究員，博士生導師；陳翰酸，中國科學院系統科學所研究員，博士生導師；陳翰香，美國阿拉巴馬大學數學博士；陳競一，美國期坦福

大學博士，現在美國麻省理工學院從事數學研究。陳老的事業在他的後輩中得到繼承。

(2) 我國南北朝時傑出的數學家祖沖之，兒子祖暅，孫子祖皓，祖孫三代都精通數學；清朝出現的梅文鼎數學家族，梅文鼎與兩個弟弟，兒子和兩個孫子，以及曾孫等祖孫四代都精通數學。在同時代，瑞士出現伯努利 (Bernoulli) 數學家族，綿延祖孫五代人，共有數學家十位之多。德國數學家希爾伯特 (David Hilbert) 的母親，是位「不僅對哲學和天文學饒有興趣而且被『素數』弄得著了迷」的女性。

(3) 德國數學家萊布尼茨 (Leibniz)，出身于書香門第，父親是萊比錫大學的道德哲學教授，母親出身於教授家庭，父母親親自做孩子的啓蒙老師，耳濡目染，使萊布尼茨從小就十分好學。

(4) 數學家格拉斯曼出生於一個知識份子家庭，父親研究過神學、數學物理學，母親是一位牧師的女兒。格拉斯曼的孩子中，盧多爾夫成爲物理學家，赫爾曼成爲數學家。格拉斯曼的最初的教育來自母親和一所私立學校。

以上這些典型事例，說明數學素質與遺傳有一定關係，但是卻沒有撇開家庭教育、家庭熏陶這方面的因素。顯然，名人的家庭對孩子的後天影響與普通人的家庭對孩子的後天影響不同，才能出色的父母對孩子的後天影響也與才能平平的父母對孩子的後天影響不同，這不能不說明水平不同的家庭教育也起著一定的作用；事實已經證明，在同等教育條件下對正常兒童和弱智兒童進行培養，結果差別很大。數學素質離不開遺傳，遺傳是人的數學素質高低的一個重要的潛在因素，如果這一潛在因素差，家庭環境、學校環境、社會環境再好，數學素質也難以提高；而如果這一潛在因素優越，家庭環境、學校環境、社會環境不好，其數學素質的發展也同樣難以提高。可見：**數學素質是天賦與環境相結合的產物，二者缺一不可。**

### 3. 數學素質的環境因素

所謂數學素質的環境因素是指學習者所處的家庭環境、學校環境、社會環境等外部條件，其中尤以家長、教師、教材、文化傳統等因素對他們的影響爲最大。

### 3.1. 家庭環境

家庭環境包括父母對智力活動的興趣愛好，對數學所抱的態度，平時的言行等，都會有意或無意中對子女產生影響和發生作用。歷史上曾出現過一些數學家，除了受遺傳因素的影響外，主要是由於家庭影響（包括家庭教育）的結果。如美國數學家維納（Norber Wiener），從小受其父母的嚴格教育，不僅引導他刻苦學習而且特別注重培養他獨思考。「維納在自己的回憶錄《我是一個數學家》中談到，如果不是父親培養他具有獨立性，他就只能是個才能平常的普通人。」<sup>[4]</sup>

家庭環境對數學素質的影響因素，主要是家長的文化教育素質和自身的言行，對子女教育的內容、方式和方法等，而不是家庭的社會經濟地位。正如前蘇聯教育家蘇霍姆林斯基說：「家庭的智力氣氛對兒童的發展具有重大的意義。兒童的一般發展、記憶，在很大程度上取決於：家庭裏的智力興趣如何，成年人讀些什麼，想些什麼，以及他們給兒童的思想留下了哪些影響。」<sup>[4]</sup>

### 3.2. 學校環境

學校環境（指正規學校環境），是人正式的啓蒙性的場所，是獲得知識、培養集體意識。社會觀念以及各種價值觀、人生態度等心理素質，智慧素質的重要時期；也是人走向社會之前、成才之前的關鍵時期。學校環境對數學素質的影響因素主要包括數學教師、數學教材和同學。數學教師通過教學，極大地影響著學生的數學素質，並且以其自身的個性品質積極地影響著每個學生的心靈。

挪威數學家阿貝爾，13 歲進中學，由於學校教師教學很差，不能引起他對學習的興趣，但是到 15 歲時，幸好來了一位優秀數學教師洪保，他很善於教學，使阿貝爾的數學學習出現了轉機，數學素質不斷提高，成了他一生中的轉捩點。

數學書籍對數學素質的影響也是顯而易見的。許多科學家、數學家的青少年時代都曾受到一些優秀數學書籍的重要影響，不僅從中得到數學意識、思維和方法的熏陶，而且在他們的一生中留下了難忘的印象。

華羅庚處於應該繼續上學的歲月，卻因家庭貧困失學在家，他靠著自學一本大代數、一本解析幾何和一本近 50 頁的微積分，十分艱苦地頑強

地向著數學堡壘進軍。他迷上了這幾本書，終日如醉如癡地鑽研數學，不務家業，引起了他父親的反對，並把「罪過」歸於這些「天書」，要放火燒掉。「過了許多年以後，華羅庚成了舉世聞名的數學大師。」這反映了一個人在成才的道路上，數學書籍對數學素質的獲得所起的作用和影響。

### 3.3. 社會環境

學生的數學素質的獲得是在一定的社會環境中進行的，他們總是有意或無意地接受其影響，並產生這樣或那樣的作用。在社會環境中，如一些人聲稱學習數學無用或高談數學難學，非一般人所能掌握，或說數學枯燥無味等，這些都會給學生數學素質的獲得帶來不良影響。再如人們在考察希爾伯特之所以成為偉大的數學家時，不能不提及他所受的社會環境的影響。希爾伯特誕生於文化名城哥尼斯堡，市內建有七座橫跨普累格爾河的橋，其中五座與河中的克奈芳福島相連，它就是載入數學史冊中著名的「七橋問題」的誕生地。無疑，這對希爾伯特的成長，產生重大的影響。

另外，當今世界資訊技術飛速發展，這促進了數學科學的突飛猛進，給數學增添了新鮮血液。因此資訊技術也是影響數學素質的一個重要因素。

### 參考文獻

- [1] 張乃達著《數學思維教育學》，江蘇教育出版社，1990
- [2] 《數學教師》，1996，5－6
- [3] 《數學通報》，1996，4－5
- [4] 鄭君文等著，《數學學習論》，廣西教育出版社，1991