「何以當$a > 0$時，$y = ax^2 + bx + c$會很開心？」

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

以下是常見關於$y = ax^2 + bx + c$特徵的分類表：

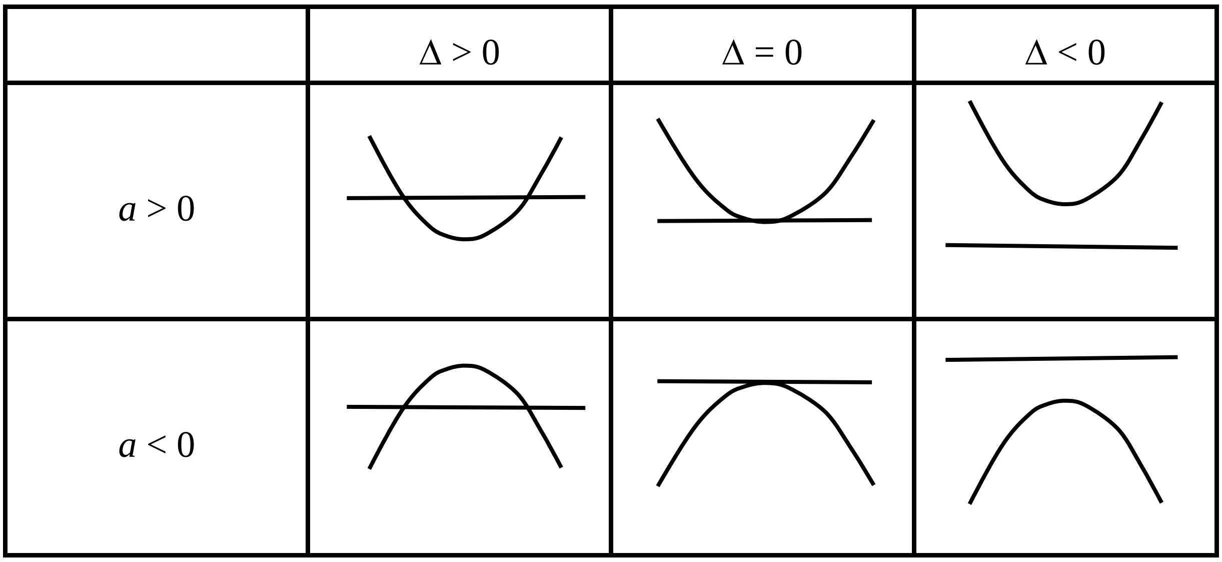

圖　一

這無疑是個很清晰的總結，然而這恐怕並不應該是整個教學過程。筆者甚至聽過老師用「$a > 0$，所以開心地笑：☺」、「$a < 0$，所以就不開心了：☹」去協助學生記憶，有點令人啼笑皆非。

最近有一位中四學生與筆者談到這個課題。

生：「何以當$a > 0$時，$y = ax^2 + bx + c$會『碗口』向上？」

筆：「因爲當 x 愈大時，y 始終會愈來愈大。」

生：「雖然老師曾用一些實例得出這個結果，我始終不明白背後的原理。」

筆：「試考慮$y = 0.0001x^2 - 10000$ 的簡單情況，雖然開始時(*)，y負得很厲害，而x^2的係數又只有 0.0001 那麼小，但當x加大時，y始終向上升，總有一天會變成正數，故此圖像必會如圖二那樣。」

(*) 作者註：其實指當$x = 0$時

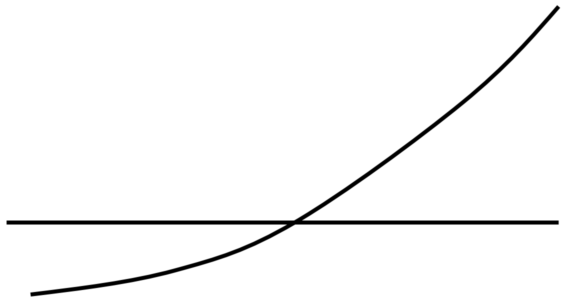

圖　二

生：「明白了，但有 x 的時候又如何？」

筆：「你首先想想，x^2是x的平方（自乘），x^2的增長快一點呢，還是x升得快一點呢？」

生：「x^2。」

筆：「其實更準確點，是當$x > 1$ 的時候，x^2會比x升得快。其他的時候，你自己代一代$x = 0.5$、$x = -0.3$、$x = -5$ 就知道了。」

生：「明白。」

筆：「用與上面類似的道理，縱使我們看看$y = 0.0001x^2 - 10000x - 10000$。『$b$』負得很厲害、『$c$』也負得很厲害，而『$a$』就只有 0.0001 這麼一點點，但當$x$愈大，正如你剛才所說，$x^2$的『走勢』總是比$x$的快，故最終會趕過$bx$及$c$的負數影響而把$y$由負扭轉為正。」

生：「完全明白了！一早這麼解釋就沒事了！」

筆：「且慢！這只解釋了圖的右邊的情況，左邊又如何呢？」

生：「…」

筆：「再返回考慮$y = 0.0001x^2 - 10000$ 這個簡單情況。試想想，當x為負數時，x^2會怎樣？」

生：「負負得正。」

筆：「那麼$y = 0.0001x^2 - 10000$ 左邊的情況應該與右邊的情況一樣（圖三）。」

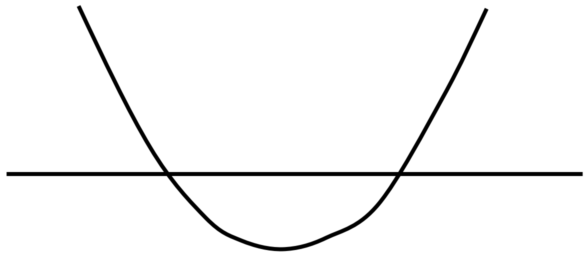

圖　三

生：「對。」

筆：「那末，當有 x 的時候又如何呢？」

生：「應該都是一樣的。」

筆：「因爲…？」

生：「…」（接不上）

筆：「因爲和上面一樣，x^2的作用比x的作用大。而當有x^3 (#) 時候就不一樣了，因爲到時已沒有負負得正。」

當然筆者可再點出$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$的一般情況（圖四），但由於估計上面已談了很多，學生還是需要一些時間消化，故此沒有正談下去了，但學生卻加上一句「這比記表清楚得多了。」

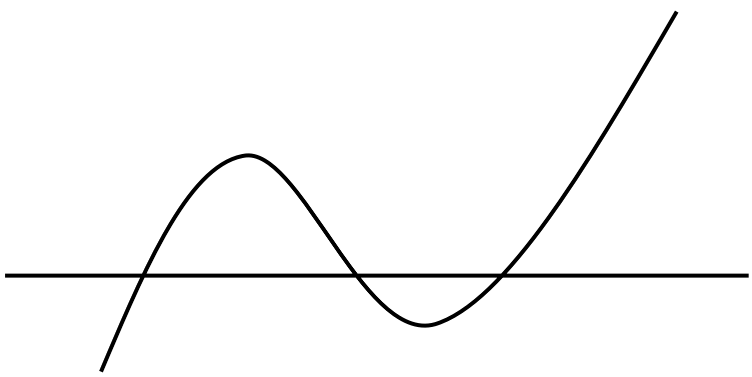

圖　四

(#) 作者註：即x^3的係數非零。

當然如果筆者當時手頭上有適當的電腦軟件，可展示係數與圖像上升下降的關係，則應會更有動感。在這個閒談過後，筆者有兩個反思。

首先，一些我們以為某些觀念較為深奧，往往用一些譬諭、表象、甚至歌訣等協助學生記憶，但這些也可能會讓學生（起碼對於某些學生）更難掌握。

當然如何處理因人而異、因處境而異。筆者唸書時就沒有見過圖一了。當時老師是慢慢綜合起來而不把圖一看成「鐵板一塊」的教學任務。

於是乎，筆者便得到第二個反思。也許「故事」就是這麼發生：寫課程的人、寫教科書的人，見到很多「好」的教學法（圖一也好、上面的表述也好），就熱心地把之寫進課程、寫進教科書。老師也生硬地接收。課程與教科書就變得包羅萬有了。但與此同時，教學任務便變成教教科書以內的每個知識點，也就沒有人想過教教科書以外的東西了。沒有人想過很多教學技巧其實應「得魚忘荃」、不必老是像一個生硬劇本般表述。也沒有人想過，一些教學方法（縱使如何有效）是不一定寫進課程裏，也不一定以教科書的形式出現。

所謂「教科書是死的，人是活的」，雖然這已是老生常談，但不曉得多少人領悟其真義。