一個數學問題的開放設計(*)

傅海倫
山東師範大學數學系

長期以來，數學教學總是強調它的邏輯性、演繹性、封閉性。自從 70 年代日本數學教育家提出「開放性問題」（open-ended problem）以來，在國際數學教育界引起了廣泛的重視。數學開放題已成爲世界性的數學教育焦點，與之適應的「開放性」教學（open approach teaching）也成爲世界性的數學新的發展趨勢。1998 年國際數學教育委員會在韓國召開的第一屆東亞國際數學教育大會上，集中討論的課題之一就是數學教學的「開放性」。

「開放性」教學之所以成爲國內外數學教育界的熱門話題，究其原因在於這種嶄新的教學方法是著力培養學生分析問題和解決問的多方面活動能力和數學思維能力，讓學生能夠按各自的目的，不同的選擇，不同的能力，不同的興趣選擇不同的教學並得到發展。本文以一道數學題爲例，通過解法的開放、結論的開放和條件的開放性設計，說明如何進行開放性的教學。

例：如圖 (1) 所示，D、E、F 分別是 ΔABC 邊 BC、CA、AB 上的點，且 $DC=\frac{1}{3}BC$，$EA=\frac{1}{3}CA$，$FB=\frac{1}{3}AB$，AD 交 BE 於 P，BE 交 CF 於 Q，CF 交 AD 於 R，已知 ΔABC 的面積爲 7，求 ΔPQR 的面積。

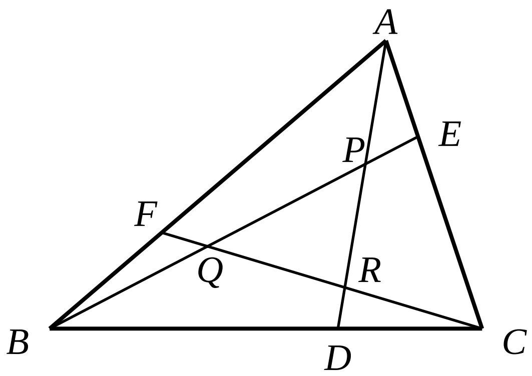

圖 (1)

(*) 作者按： 本文為數學天元青年基金和教育部青年專項課題資助專案（NO.EHA010449）的成果之一。

解析：此題常見的解法是平面幾何方法，但需要添加輔助線，計算十分複雜。下面通過幾種特殊的開放性設計，以說明如何進行數學開放性教學：

一、利用仿射變換

根據兩個三角形面積之比是仿射變換不變數。所以我們要討論一般三角形的性質涉及仿射性質，可以考慮特殊的三角形（等邊三角形），證明特殊情況成立，然後由仿射不變性而廣到一般的三角形。

1. 開放性教學設計

如圖 (2)，等邊三角形$A_1B_1C_1$，$D_1C_1 = B_1C_1/3$，$E_1A_1 = C_1A_1/3$，$F_1B_1 = A_1B_1/3$，A_1D_1交B_1E_1於P_1，B_1E_1交C_1F_1於Q_1，C_1F_1交A_1D_1於R_1。

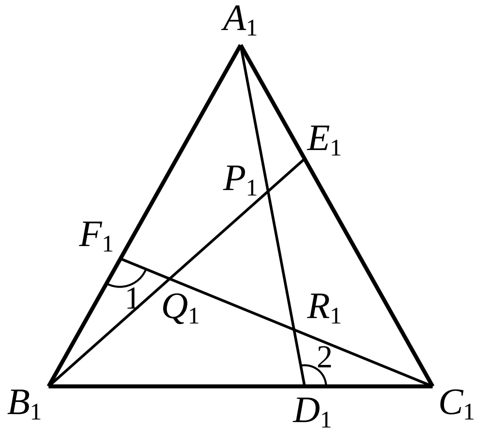

圖 (2)

由平面幾何知識， $\Delta A_1B_1E_1 \cong \Delta B_1C_1F_1$，$\angle 1 = \angle 2$，因為 $\angle C_1R_1D_1 = \angle F_1B_1C_1 = 60°$，所以 $\Delta R_1C_1D_1 \sim \Delta B_1C_1F_1$，又在 $\Delta B_1C_1F_1$中，設$B_1C_1 = a$，由餘弦定理，得$C_1F_1^2 = B_1C_1^2 + B_1F_1^2 - 2 \cdot B_1C_1 \cdot B_1F_1 \cos 60°$，即$C_1F_1^2 = a^2 + \frac{1}{9}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{10}{9}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{7}{9}a^2$

$$\text{所以}\quad S_{\Delta R_1C_1D_1} : S_{\Delta B_1C_1F_1} = C_1D_1^2 : C_1F_1^2 = \tfrac{1}{9}a^2 : \tfrac{7}{9}a^2 = 1 : 7$$

因為 $S_{\Delta B_1C_1F_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1B_1C_1}$ ，所以 $S_{\Delta R_1C_1D_1} = \frac{1}{21}S_{\Delta A_1B_1C_1}$ 。

同理，$S_{\Delta P_1C_1F_1} = S_{\Delta Q_1F_1B_1} = \frac{1}{21}S_{\Delta A_1B_1C_1}$ 。所以 $S_{\Delta P_1Q_1R_1}$

$$\begin{aligned} S_{\Delta P_1Q_1R_1} &= S_{\Delta A_1B_1C_1} - (S_{\Delta B_1C_1F_1} + S_{\Delta C_1D_1A_1} + S_{\Delta E_1A_1B_1}) + S_{\Delta R_1C_1D_1} + S_{\Delta P_1E_1A_1} + S_{\Delta Q_1F_1B_1} \\ &= S_{\Delta A_1B_1C_1} - S_{\Delta A_1B_1C_1} + \tfrac{1}{7}S_{\Delta A_1B_1C_1} \end{aligned}$$

$$= \quad \tfrac{1}{7} S_{\Delta A_1 B_1 C_1}$$

同樣可以由三對對應點確定唯一的仿射變換T，在仿射變換下，使等邊三角形$A_1B_1C_1$與 ΔABC對應，三角形面積之比是仿射變換下的不變數。所以，$S_{\Delta PQR} : S_{\Delta ABC} = 1 : 7$，由$S_{\Delta ABC} = 7$，故$S_{\Delta PQR} = 1$，即 ΔPQR的面積是 1。

以上證明還可以得出$S_{\Delta RCD} : S_{\Delta ABC} = 1 : 21$。

2. 教學方法的開放

(1) 中學幾何中沒有引入仿射變的概念，但所涉及的很多圖形的性質，如共線點、共點線、線段中點、平行線段數量比、面積關係、二次曲線的漸近線、切線、……等，有些是仿射性質，有些則是與仿射有關的性質，我們可以利用仿射變換的知識來處理有關初等幾何的問題。

(2) 等邊三角形、等腰三角形在仿射變換下變爲一般的三角形，我們也可以推廣：正方形、矩形變爲平行四邊形；等腰梯形變爲一般梯形。如果我們要討論的一般圖形的性質涉及仿射性質，可以反過來考慮其特殊圖形，證明特殊情況成立，然後由仿射不變性而推廣到一般。

3. 結論的開放

(1) 當D、E、F各等分點同時分各邊成分數比，即若$BD : DC = CE : EA = AF : FB = m : n$時，則有結論：$S_{\Delta PQR} : S_{\Delta ABC} = (m-n)^2 : (m^2 + mn + n^2)$。

(2) 當 D、E、F 各分點分別分各邊爲一定比時，如當$BD : DC = m$，$CE : EA = n$，$AF : FB = t$時，則有結論：$S_{\Delta PQR} : S_{\Delta ABC} = (1 - mnt)^2 : (1 + m + mn)(1 + n + nt)$。

二、利用物理學中的質量分佈理

眾所周知，數學在物理學中的應用十分廣泛。物理學的發展往往需要借助於數學工具，物理學原理也往往應用數學的公理、定理、公式、法則等來闡述或證明；另一方面，物理學的革命往往推動數學的發展，物理在數學中的應用應該受到重視，特別是數學的開放性教學，在思索和處理數學問題時，若能借助於物理原型的啓發，利用一些物理性質幫助分析，就有可能構思山富有創造性的解法，從而培養學生綜合運用相關學科知識的能力。

質量分佈原理是物理學中的基礎原理，在物理學中有著十分廣泛的應用。對於敌多數學問題，如果應用這個原理進行分析，可以很好地把握住問題的本質，也可構造出極富創造性的解法，從而巧妙地解決問題。

1. 開放性教學設計

這裏我們借助這樣的一個物理原型：視 ΔABC 爲有質量的三角形，它的三頂點就是三個質點，令其質量分佈分別爲 A：1 克；B：2 克；C：4 克，則點 F 爲線段 AB 的重心，其質量爲 $1 + 2 = 3$ 克，點 D 爲線段 BC 的重心，質量爲 $2 + 4 = 6$ 克，而 ΔABC 的重心必在線段 CF 上，又在線段 AD 上，故其交點 R 一定是 ΔABC 的重心，質量爲 $1 + 2 = 4 = 7$ 克。

根據物理質量分佈與杠杆平衡原理，有：$AR = 6RD$。

又易知 ΔACD的面積爲 ΔABC面積的 $\frac{1}{3}$，所以，$S_{\Delta ACR} = (\frac{1}{3}\times\frac{6}{7})\ S_{\Delta ABC} = 2$。同理可得，$S_{\Delta ABP} = S_{\Delta CBQ} = 2$，故$S_{\Delta PQR} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ACR} - S_{\Delta ABP} - S_{\Delta CBQ} = 7 - 2 - 2 - 2 = 1$。

2. 教學方法的開放

受此問題方法的啓發，我們突破慣用的方法，在許多數學的定理教學中，自覺地嘗試運用物理的有關原理，會得出一些奇妙的證明方法。順便舉幾個開放性例證。

開放 1：三角形的重心定理

平面幾何中三角形重心定理的教學，就應該突破純數學的方法推導、證明。其實，它更適合應用物理學的原理來讓學生理解重心的概念，從而掌握重心定理的實質。上例啓示我們用質量分佈原理進行證明：

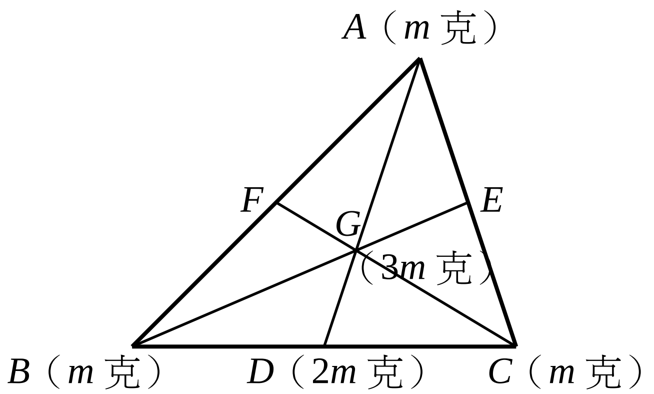

圖 (3)

如圖 (3)，可將 ΔABC 看作爲質量三角形，它的三個頂點就是三個質點。只要將 A、B、C 三點的質量分佈均爲 m 克，則 D 爲 BC 重心，質量爲 $2m$ 克， E 爲 AC 重心，質量爲 $2m$ 克，F 爲 AB 重心，質量爲 $2m$ 克。三中線 AD、BE、CF 相交於一點 G，G 爲 ΔABC 的重心，質量爲 $3m$ 克，所以有 $AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$。

開放 2：三角形的內心定理

對於三角形內角平分線定理：只要將 ΔABC 按如圖分佈質量：A：a 克，B：b 克，C：c 克（a、b、c 分別爲 BC、AC、AB 三邊長度值），則可以證明 ΔABC 三內角平分線相交於一點，如圖 (4)。

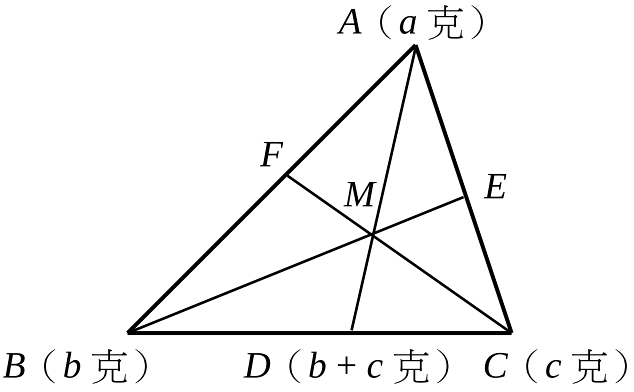

圖 (4)

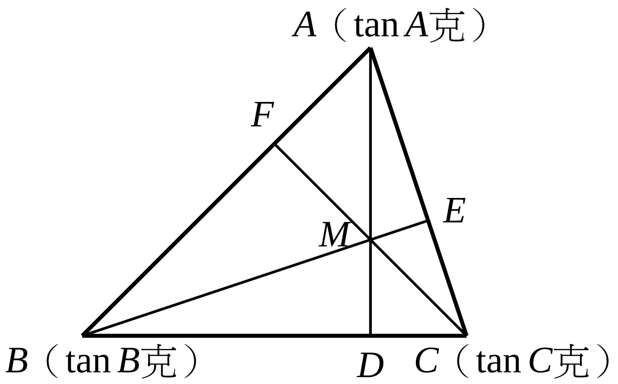

圖 (5)

開放 3：三角形的垂心定理

對於三角形的三高定理：只要將 ΔABC按如圖分佈量：A：$\tan A$克，B：$\tan B$克，C：$\tan C$克（A、B、C分別爲 ΔABC三銳角值），則可證明 ΔABC 三高線相交於一點，如圖 (5)。

可以說，「開放性」教學也爲當前我國數學教育研究的一個新的增長點。數學開放題的教，不僅僅是知識獲得的過程，能力提高的過程，也是學生綜合素質和科學素質的形成過程以及人文精神不斷昇華的過程。中國在「一題多變」、「一題多解」的開放性教學中已有許多好的傳統，廣大教師就當在此基礎上深入挖掘數學方法及其教育思想，不斷提高對開放性數學問題教學的認識，使之不斷滿足教育改革的需要。

參考文獻

[1] 傅海倫。數學解題中的若干原型啓發。《教學與管理》1996 年第 4 期。

[2] 楊文茂、歐陽仲威。《中學幾何的基礎與拓廣》。武昌：華中理工大學出版社，1997 年。