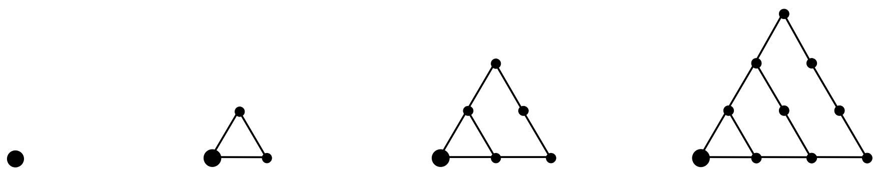
探索多邊形數

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

> 數缺形時少直覺，形少數時難入微。
> ～～華羅庚

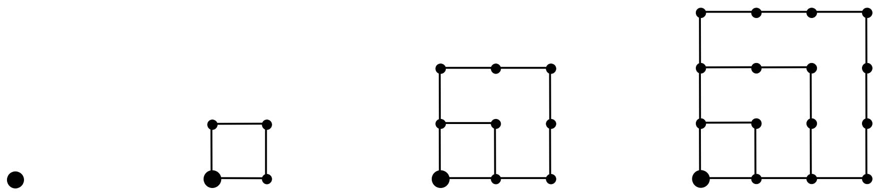
引子

相信大家都知道，我們稱數列 { 1 , 3 , 6 , 10 , ... } 中的數字為「三角形數」，而數列 { 1 , 4 , 9 , 16 , ... } 中的數字為「正方形數」。這是因為我們可以利用這些數目的小圓點，排列出一層層的三角形和正方形來。（見圖 1 及圖 2。）



1 , 3 , 6 , 10 ...

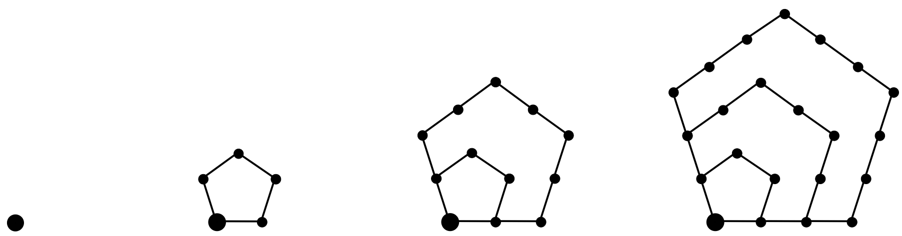
圖 1



1 , 4 , 9 , 16 ...

圖 2

利用「類似的」方法，我們可以得出「五邊形數」為 { 1 , 5 , 12 , 22 , ... }。（見圖 3。）



1 , 5 , 12 , 22 ...

圖 3

但是，一直以來，我對「五邊形數」的結果都感到不滿意。原因是，我總覺得由這些數字所構作出來的五邊形，性質上和「三角形數」或「正方形數」所構作出來的圖形，有很大的分別。

不錯，從圖 1、圖 2 和圖 3 可見，三組數字都是先從左下角的一點（即第一層）出發，畫出一個邊長為 1 個單位的第二層圖形，然後加上一個邊長為 2 個單位的第三層圖形，然後再逐步擴展下去，成為現時的結果。但在三角形數或正方形數中，「左下角一點」的要求並非必要。我們可以擦去圖中原有的線段，然後連結出另一組線段，從而令到圖形可以從另外的一個頂點出發，構作出相同層數的三角形或正方形。（見圖 4。）還有，在三角形和正方形的內部，我們可以利用線段，連結出較小的三角形或正方形來。（見圖 5。）但以上兩個特點，在五邊形數的圖形中就找不到了！

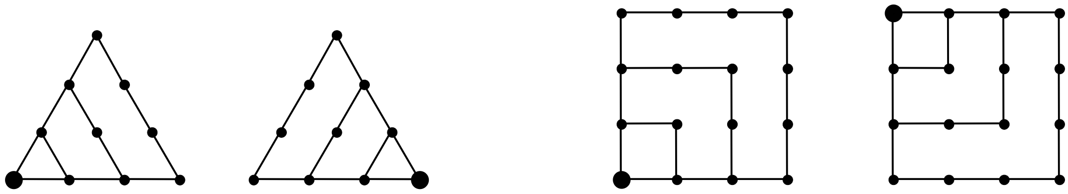


圖 4

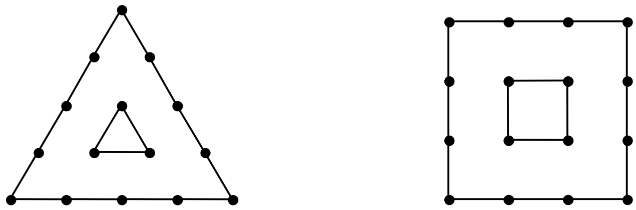


圖 5

看看圖 6。這是第四個五邊形數 “22” 所對應的圖形。如果我們擦去圖中的線段，我們無法從另一個頂點出發，連結出相同層數的五邊形。而且，在這個五邊形中間，亦找不到一些點，可以連結出一個較小的正五邊形來！

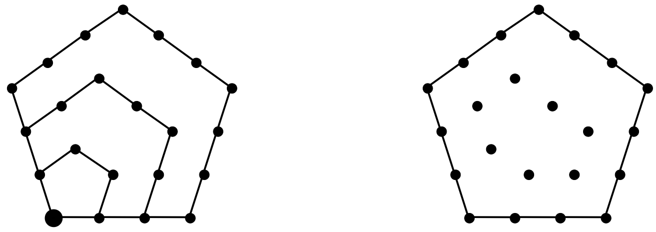


圖 6

有時，我甚至乎想，多層的五邊形，不是應該像圖 7 的樣子嗎？為何

五邊形數不是從這圖構作出來的呢？爲何五邊形數一定要像圖 3 那樣構作出來呢？

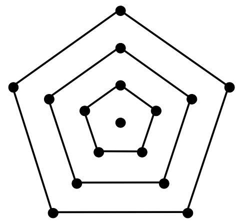


圖 7

計算

爲了方便計算，我將$f_m(n)$ 設定爲第n個m邊形數的數值，即$f_3(1) = 1$、$f_3(2) = 3$、$f_3(3) = 6$、$f_4(1) = 1$、$f_4(2) = 4$、$f_4(3) = 9$ ……等等。易知，正方形數的一般數型爲$f_4(n) = n^2$。通過圖 8，亦不難證實，三角形數的數型爲$f_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$。展開後，可得$f_3(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$。

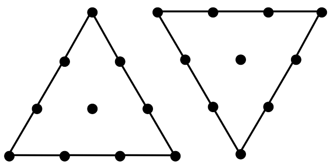


圖 8

觀察f_3和f_4兩個算式，令我想到，由於多邊形是平面上的圖形，所以有理由相信，所有的多邊形數的數型，都應該服從某一個二次的多項式。即多邊形數的數型應該可以寫成$f_m(n) = an^2 + bn + c$的樣子，其中a、b、c爲待定係數。

由於上述公式有三個待定數值，我們就需要找三個初始條件來確定它們。不難理解，我們應該設$f_m(1) = 1$ 和$f_m(2) = m$。至於第三個初始值，我們可以考慮當$n = 0$ 時的情況。當$n = 0$ 時，即多邊形每條邊的長度都等於 0，因此所有邊的總和亦應該等於 0，故此我們有$f_m(0) = 0$。

由於$f_m(0) = 0$，很明顯，$c = 0$。當$n = 1$ 時，我們有$a + b = 1$。當$n = 2$ 時，我們有 $4a + 2b = m$。解這聯立方程，得$a = \frac{m-2}{2}$，而$b = \frac{4-m}{2}$。

亦即是說，多邊形數的數型爲$f_m(n) = \frac{m-2}{2}n^2 + \frac{4-m}{2}n$。

當$m = 3$時，我們仍然得到$f_3(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$；當$m = 4$時，我們有$f_4(n) = n^2$。以上兩個結果都和較早前的結果吻合。

當$m = 5$時，我們便有$f_5(n) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$。將$n$代入 1、2、3、4 等數值時，我們得到$f_5(1) = 1$，$f_5(2) = 5$，$f_5(3) = 12$和$f_5(4) = 22$。這些結果，亦與圖 3 所造出來的結果吻合。由此可見，即使我不太接受圖 3 構作五邊形數的方式，這個方式卻是一個從「三角形數」和「正方形數」的合理推廣。

進一步地，若我們設$m = 6$，則$f_6(n) = 2n^2 - n$。由此，我們可以計算出「六邊形數」的數列爲 { 1 , 6 , 15 , 28 , … }。（見圖 9。）

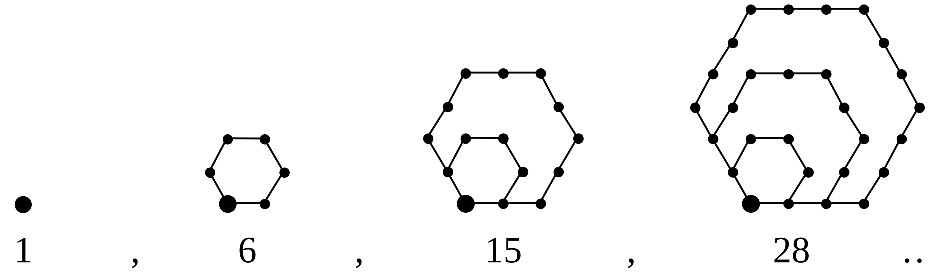


圖 9

歸納法證明

假如大家覺得利用「待定係數法」有點牽強，那麼我們可以利用數學歸納法，將那多邊形數的數型$f_m(n) = \dfrac{m-2}{2}n^2 + \dfrac{4-m}{2}n$ 再證明一次。

對於任何一個m，當$n = 1$時，總會有$f_m(1) = 1$。所以算式正確。

假如$f_m(k) = \dfrac{m-2}{2}k^2 + \dfrac{4-m}{2}k$。從圖 10 可知，在第$k$層的多邊形上，再加一層，就等於加上一條有$k + 1$點的邊和$m - 3$條有$k$點的邊。

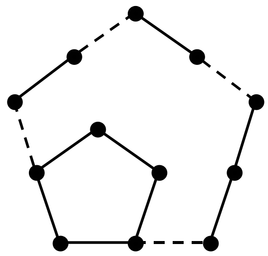


圖 10

由此得 $f_m(k + 1) = \dfrac{m-2}{2}k^2 + \dfrac{4-m}{2}k + (k + 1) + (m - 3)k$

$$= \frac{m-2}{2}k^2 + \frac{4-m}{2}k + km - 2k + 1$$

$$= \frac{m-2}{2}k^2 + k(m-2) + \frac{m-2}{2} + \frac{4-m}{2}k + \frac{4-m}{2}$$

$$= \frac{m-2}{2}(k+1)^2 + \frac{4-m}{2}(k+1)$$

最後，由數學歸納法的原理可知，算式$f_m(n) = \frac{m-2}{2}n^2 + \frac{4-m}{2}n$ 正確。

一個發現

去年（二〇〇一年）十月，當在某中一班介紹完「五邊形數」的有關問題後，班上有一位同學對我指出，她發現五邊形數有以下的一個美妙關係：

五邊形數	1		5		12		22		35		51		70
前後項相差		4		7		10		13		16		19	
兩差之差			3		3		3		3		3		

經她一提之後，我發現「三角形數」、「正方形數」、甚至「六邊形數」都有相類似的關係。例如：「三角形數」的「兩差之差」等於 1，「正方形數」的等於 2，「六邊形數」的則等於 4。

事實上，如果函數$f(n)$ 爲二次多項式，即$f(n) = an^2 + bn + c$，則不難證明，函數$F(n) = f(n+1) - f(n)$ 必定爲一次多項式，而 $F(n+1) - F(n)$ 必定爲常數。因此，我這位學生的「發現」，其實是非常「明顯的」，祇不過，我一直都將這性質忽略罷了！

不過，這個「發現」，可以說是完全清除了我對「多邊形數」的疑慮！原來，「多邊形數」的性質，就是它們前後項的相差，（即每層小圓點增加的數目，）按照一個等差數列而遞增。而該等差數列的公差，又正好等於該多邊形邊數減去 2。

更好的證明

應用這結果，就可以構作出多邊形數數型$f_m(n) = \frac{m-2}{2}n^2 + \frac{4-m}{2}n$ 的另一個更好的證明。

首先，根據上面的結果，我們有$f_m(n+1)-f_m(n)=(m-2)n+1$。

$$
\begin{aligned}
\therefore \qquad f_m(n)-f_m(n-1) &= (m-2)(n-1)+1 \\
f_m(n-1)-f_m(n-2) &= (m-2)(n-2)+1 \\
\cdots &= \cdots \\
f_m(1)-f_m(0) &= (m-2)\cdot 0+1
\end{aligned}
$$

將兩邊加起來，得

$$
\begin{aligned}
f_m(n)-f_m(0) &= (m-2)\frac{[0+(n-1)]\cdot n}{2}+n\times 1 \\
f_m(n) &= \frac{(m-2)n^2}{2}-\frac{(m-2)n}{2}+n \\
&= \frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n
\end{aligned}
$$

這就是所需證明的公式了。

注意：在上面的計算之中，我們再次用到「等差數列之和 = (首項 + 末項) × 項數 ÷ 2」的算式。這其實亦是由圖 8 推算出「三角形數」數型的相同算式。由此，我們可以對多邊形數的圖形，有更進一步的看法。這就是：四邊形或以上的多數邊，它們其實是從三角形拼合出來的！如圖 11。

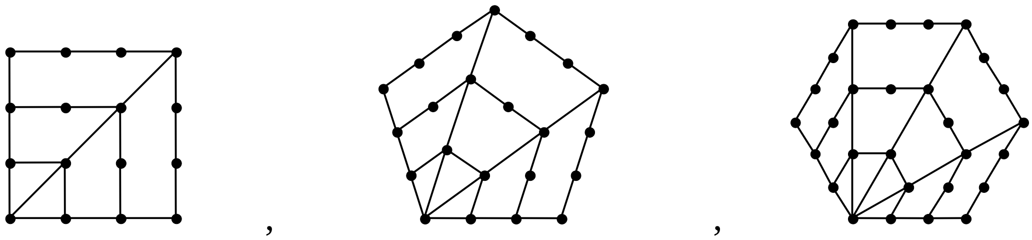


圖 11