

從一個「普通」的教學課談起

黃毅英

香港程中文大學課程與教學學系

這是一個極普通(慣常)的中六教學課，目的是要講解代入積分法。老師舉出一些常見的例題作示範：

$$(1) \quad \int x^4(x^5 - 2)^3 dx$$

$$(2) \quad \int 2x^2 e^{-4x^3} dx$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-8x}}$$

等。對於我們來說，這些可能是十分明顯的。以(2)為例，設 $u = -4x^3$ ， $du = -12x^2 dx$ ，故

$$\int x^4(x^5 - 2)^3 dx \quad (*)$$

$$= -\frac{1}{6} \int e^u du$$

$$= -\frac{1}{6} e^u + C = -\frac{1}{6} e^{-4x^3} + C$$

答案可為清楚不過。學生一步步跟著老師演練，理解上亦不應有多大困難。

但細心一想，從學生的角度看，總是會出現兩個問題

一、如何知道用那個代入式？

二、由於選取哪個代入式往往有嘗試的成份，我們如何不待把整道數算畢便知道用的代入式是否行得通？

對於第一個問題，筆者以為老師若能把思路邊做邊解說一下，對學生有莫大的裨益。例如 (1)，我們有兩個較「自然」的試點：

$$(a) u = x^4, \quad (b) u = x^5 - 2。$$

利用(a)其實不是不可以的，反正有關的函數只是一個多項式，根本不需要代入法。當然老師可以解釋，對 $\int x^4(x^5 - 2)^n dx$ 就糟糕了。

至於(2)，其實可以考慮先試 $u = 2x^2$ ，得出

$$\begin{aligned} & \int 2x^2 e^{-4x^3} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \sqrt{2u} e^{-4(u/2)^{3/2}} du \end{aligned}$$

當然做不下去了；又或代 $u = e^{-4x^3}$ (其實是可行的)。這不只是要說明 $u = 2x^2$ 是不可行的，而是要回應上面的第二個問題。就以上面(*)的解答為例，我

們可以試將之分成三個次目標^(*)或階段：

(a) 代入 $\int x^4(x^5 - 2)^3 dx$

$$= -\frac{1}{6} \int e^u du$$

在這點，可讓學生看到這樣已轉到一個(學生能力下)可以積分的東西。接著

(b) 積分

$$= -\frac{1}{6} e^u + C$$

這可謂基本上大功告成。最後

(c) 代回原本變項(x)及進行簡化

$$= -\frac{1}{6} e^{-4x^3} + C$$

如此，來龍去脈可謂便清楚了。

^(*) 黃毅英(1990)。解題與數學教育。《數學傳播》54期，71-81。後載黃毅英(1997)(編)。《邁向大眾數學的數學教育》，59-82。台北：九章出版社。