圓 盤 巧 填 色

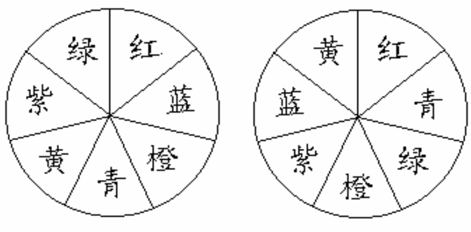
葉中豪

上海教育出版社

【題】 如圖是一個七色圓盤，它分成七個大小相同的扇形，依次填有紅、橙、黃、綠、藍、青、紫七種顏色。現在要求你將一個同樣形狀的空白圓盤按一定次序也填上這七種顏色，使得兩塊圓盤不管怎樣疊合（但要求上下扇形互相對齊），上下兩片至多只有一種顏色是對準的。

這是第六屆“從小愛數學”邀請賽的一道賽題。同學們對這道題目的興趣很濃，大家嘗試著種種填法。由於兩個盤可以隨意疊合，甚至還可翻過來再重疊，填起色來難度還真不小。

經過反復嘗試，最後可以找到兩種本質不同的解答：

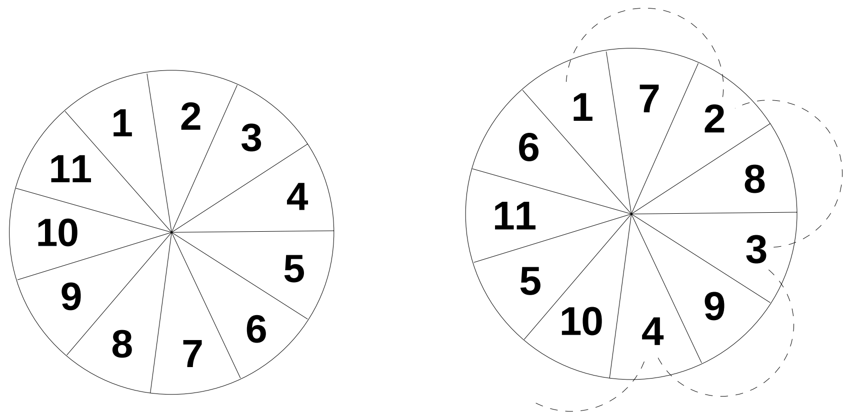


其他的解答都可由這兩組解經過旋轉或翻轉而得到。否則，你的填法將是不符合要求的。也就是說，我們總可以尋找出兩種顏色的扇形，它們之間

具有相等的間隔，因而重疊時可以上下同時對準。

如果圓盤不再是分成七份，而是分成 n 個相等的扇形，這時就需用 n 種顏色去填充圓盤，仍然只允許上下兩片至多只有一種顏色是對準的，這時情況又變得如何，還能找到成功的填法嗎？先讓我們一起來看看圓盤分成 11 份的情況。

爲了避免過多的顏色名稱，我們就用數位 1，2，…，11 分別來標記這 11 種顏色。下圖中第一個圓盤已順次填上了 11 種顏色，另一個圓盤有待我們來填充。我們可以採用如下的“跳步法”：任選一個扇形填上 1，然後順時針每走兩步依次填上 2，3，…，11 等各顏色，這時可以發現整個圓盤剛好被這 11 種顏色所填滿，而且這種填法的確是滿足要求的。

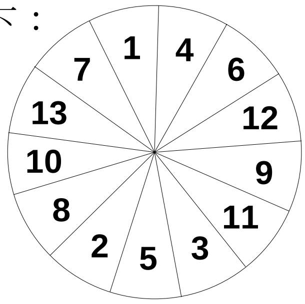


如果你將“步伐”調整爲 3，可以得到另外一種的填法，同樣也滿足要求。其實，“步伐”還可以改爲 4，5，6，…，親愛的讀者，請你自己也動手填一填，看看你能得到幾種不同的解。

可以證明，如果 n 與 6 不互質，就不可能存在滿足要求的填色法，因此當 n =3，4，6，8，9，12，14，15，…時都是無解的。反之，只要 n 與

6 互質，就一定可以找到合適的填法。這時你可以仿照上面的辦法，從某個扇形出發，每走若干步填上一種顏色，只要步伐 k 滿足，就能得到一種成功的填色方案。但是，這樣得到的解都屬於“跳步解”，也就是說，各種顏色的分佈是等間隔的。那麼，是不是還存在間隔不相等的所謂非跳步解呢？這是一個十分誘人的問題。

去年 2 月，清華大學電腦系王曦同學終於用電腦找到了 n =13 時的非跳步解，其中一組如下：



你還能找到其他類型的解答嗎？

【思考題】

1. 十個人圍著圓桌而坐，各人將自己的帽子放在桌上，每人面前都放有一頂帽子，但由於放錯了，各人面前放著的恰好都不是自己的帽子。證明可以適當旋轉桌子，使得至少兩個人面前放的是自己的帽子。
2. 將上題中的人數改爲 2n，證明同樣的結論。
3. 將上題中的人數改爲 3n，證明同樣的結論。
4. 考慮圓周上全體點所構成的集合到其自身的一一映射。問是否存在這種映射，使得任意兩個點在變換前的距離不同於變換後的距離？