

突出建模過程 提升數學素質

劉浩文

浙江余姚市第八中學

數學建模作為實施“問題解決”的一種重要方式和發展，已受到數學教育界的普遍關注。實踐表明，數學建模對提高學生用數學的意識和能力，對改善學生學習數學的興趣和數學思維結構，乃至培養創造性思維能力的作用都是不可低估。現代認知理論認為數學學習是一種主動的意義建構的活動，其實質是“意義建構”(sense constructing)。鑒於對數學學習與數學教學的認識，筆者認為，數學建模中的“建”的內涵與建構主義提倡的“建構”的內涵是一致的，即突出個性、強調自主和探索、強調知識的創造和發現。因此，數學建模教學就不能僅反映“程式輸入”式的數學模型求解過程，而要緊緊圍繞“建”的發生、發展進行知識的生長過程教學和思維訓練。

1、 數學建模：“建”的過程

數學建模是對人們在現實生活（如科學研究、技術改革、經濟管理等）中所遇到的實際問題或源自數學內部的實際問題加以分析、抽象、簡化，用數學的語言進行描述，用數學的方法尋求解決方案、辦法，並通過解釋、驗證、修改的多次反復，最終應用到實際中去的過程。事實上，數學建模是一個系統的過程，它要利用許多技巧以及翻譯、解釋、分析和綜合、計算等高層面的認知活動，整個過程就是“建”的過程。為了看到“建”的蹤影，筆者結合現代認知心理理論來分析“建”的過程。建模過程包括四個主要階段：

- **理解問題**：即通過觀察、瞭解問題的情況，找出影響該問題的主要因素。美國心理學家馬斯洛認為，人的認識需要和自我實現的需要是人的本能的需要，建構主義認為人都有適應和建構的傾向性。因此學生通過“閱讀”（包括參與實踐等）問題（這裏的問題是“原坯”形的，如社會現象的描述），就產生了學生心理意義上的問題。問題是思維的開始。所以在這一階段，學生的“建”表現在建立問題的心理表徵，問題取得了“意義賦予”（sense making）。
- **簡化、假設** 即排除次要因素，猜測重要因素之間的關係並數學地闡明它們，以期得到問題的一個數學模型。從建構意義上，數學建模就是創造，抑或說再創造。筆者認為，“創造”突出地表現在這一階段的“建”上。此時的“建”有兩層含義，一是繼續對問題進行“意義賦予”，即問題“精緻化”並賦予富有個人特質的理解（包括學生理解中的事物的本質，以及相應地理順各種關係、找到知識的鏈結等）；二是“奇跡”般地建立數學模型，由於意義建構的程度和角度的不同，此時會出現多種模型（不應受到壓制，而是要鼓勵）。
- **求解模型** 即利用數學工具處理這個模型，得到初步結果。隨著現代解題心理的深入研究，人們越來越認識到數學解題是一種探究式的、心理異常複雜的認知過程。它要展開各種模式的識別，以及相應解法的選擇，形成合理的“演算法”、“算理”。這不正是建構意義下的“建”嗎？！
- **檢驗模型（必要時修改、調整模型）** 即對得到的初步結果進行翻譯、解釋，使問題完滿解決。這一階段，學生更進一步建立問題的心理表徵，數學符號和語言文字建立心理意義的溝通。認知結構的“對內言語”直接產生“對外言語”，這也標誌著認知結構對已知問題已完成了心理意義的建構，但並不預示著“建”的過程即將結束。

由分析可知，數學建模並不能簡單地理解為建立數學模型，或者是單純的模型求解過程。恰恰相反，在數學建模的系統過程中，智力因素與非智力因素必須在“建”的關鍵點上高度的協調、結合，實現“真正”意義的創造發明。從思維的層面上，筆者以為，數學建模的“建”的過程較恰當的表述是“數學地思維”。

因此，數學建模，重在“建”字。（讀者諸君可參閱有關數學建模的例子，給予感性的體驗）

2、 數學建模：“建”功“立”業

實際上，數學建模是分析、解決實際問題的過程，即主體運用數學的思想、觀點、方法等與客觀世界相互作用，交流資訊，以最終達到解決一定問題為目標的創造性活動。從創造的意義上談及數學建模的功用和價值，“建”是功德無量，以致于筆者將從五個層面闡述“建”對學生數學素質培養的作用。

- **在觀念層面上，“建”有助於學生數學意識素質的培養** 從認知心理學角度看，數學建模是學生在一定目標的指向下，認知結構和當前問題的組成成分進行重組、轉換或整合，達到既定目標的一種主動建構活動，即新刺激（問題）引起認知結構的不平衡，在同化和順應的發生中，達到新的平衡的認知結構。可見，學生運用數學知識的主動性和自覺性是數學建模成功的關鍵。而數學意識素質的核心就是學生自覺地、主動地用數學的思想、觀點和方法去觀察、解釋、思考和處理問題，這正是數學建模所必要的。因此，數學建模有助於學生數學意識素質的養成。
- **在能力層面上，“建”有助於學生問題解決的數學素質的培養** 問題解決的數學素質主要包括：扎實寬廣的數學基礎知識，資料處理與抽象能力，使用電腦工具（尤其是電腦）的能力，創造能力，理論聯繫

實際的能力等。前面的分析和闡述中我們清楚地看到，數學建模的過程始終貫穿著這幾個問題解決的數學素質。要將實際問題模型化，需要學生有與此問題相匹配的數學知識，加上實際問題的多樣性和複雜性，學生非具備扎實寬廣的數學知識不可，它是建模的前提和基礎。在此基礎上，學生要對已佔有的資料資料進行加工整合，就有資料處理能力、歸納抽象能力及使用計算工具的能力等綜合運用。在檢驗模型時，當然就要求學生理論聯繫實際。顯然數學建模是一種充滿艱辛的創造性活動。因此，數學建模的各個方面都有助於培養學生問題解決的數學素質。

- **在思維層面上，“建”有助於培養學生邏輯推理的數學素質** 數學建模中，將實際問題“數學加工”成數學模型以及模型求解時，需要學生綜合運用抽象、概括、分析、綜合、歸納和演繹等邏輯思維方法。據現代腦科學研究表明，各種邏輯思維方法的綜合運用，有助於學生認知結構的改善，強化其思維的智力品質，使學生逐漸形成良好的思維品質與合理的思維習慣。另外，還有數學語言和符號的邏輯整理，求解過程的嚴格邏輯推理。勿庸置疑，通過數學建模活動，能培養學生邏輯推理的數學素質。

- **在語言層面上，“建”有助於培養學生資訊交流的數學素質** 運用數學語言進行資訊交流的數學素質包括學生運用精確、簡約、抽象的數學語言轉換、加工、輸出、反饋客體資訊的綜合能力。數學建模解決問題的過程實際上也是學生運用數學語言與客體的問題資訊相互交流的過程。這裏的交流，包括文字語言、符號語言和圖形語言之間的相互轉換、加工、輸出、反饋；也包括學生的對內言語和對外言語。

“數學加工”就表明學生必須用精確、簡約、抽象的數學語言。可以說，沒有數學語言的交流，就沒有數學模型的建立；沒有數學語言的

交流，也就沒有數學模型的求解。而數學語言的獲取來自問題資訊且又最終要“翻譯”成問題資訊。實踐證明，隨著學生數學建模的深入，其資訊加工系統就會不斷協調與完善。所以，數學建模極大地促進了資訊交流，從而培養了學生的資訊交流的數學素質。

- **在心理層面上，“建”有助於培養學生良好的數學心理素質** 實踐證明，一個成功數學模型的構建往往不是一次順利完成，而是需要認知結構通過同化和順應相互配合，多次反復，甚至歷經數次失敗的嘗試才能成功。由失敗到成功的嘗試過程正是對學生數學心理素質進行不斷磨煉和考驗的過程。數學建模過程中的艱辛探索，有利於學生養成良好的數學心理素質，如頑強的意志、堅忍不拔的毅力、團結協作的精神及樂觀自信的態度等。當然具備了良好的數學心理素質，反過來又會提高學生的數學建模能力。

綜上，數學建模，貴在“建”字。

3、 對數學建模的“建”的進一步思考

基於對數學建模教學的指導作用，筆者接下來對數學建模的“建”作進一步的思考。

“建”的雙重性 即指教師的“建”和學生的“建”。我們已過多地強調了學生的“建”，而忽視了教師是否也能“建”起來。指導數學建模，教師首先必須具備“建”所要求的知識和能力。由於“模”的不唯一以及解答方法不唯一，就造成了教師教學難度的增大。而且，數學建模物件撲朔迷離，教師也可能把握不住。因此，教師必須不斷調整自己的角色，參與到數學建模活動中去，與學生並肩作戰，形成自主的、探索的數學學習共同體，或者說數學建模共同體。如前所述，“建”的雙重性還指外在的建立數學模型和內在的建構心理結構。

“建”的反思性 數學學習是一種心智活動，離不開調整、監控和反

思。前面分析建模過程的階段④時已進行了反思的分析：即在完成已知問題的心理表徵後，需要對模型進行反思，修改或調整模型，以達到最佳模型。雖然，已知問題已完滿解決，但思維不應該就此結束，還必須進一步反省認知整個“建”的過程，建立對整個活動的最佳心理結構。惟其如此，才能提高我們的元認知水平，也才能提高“建”的效度。應該提醒的是：反思不僅僅是建模的後期工作，它應該貫穿“建”的始終。

“建”在於引導 數學建模活動不同於一般的課堂數學活動，是一個開放的過程，不僅問題本身是開放的（問題的發現、表述方式有情有景、解答方法不唯一等等），而且學生活動也是開放的（學生在建模過程中獨立性、活動性強，需動腦、動手和動口）。這必然要求學生自主地、探索地學習，這也導致了教師在教學中的地位和作用的改變。數學建模是不能傳授的，而是要靠學生主動的建構。學生建模的盲目性和知識的不完備，決定了教師是數學建模的促進者，教師應發揮重要的“導向”作用，也即很好地發揮“啓發者”、“質疑者”和“示範者”的作用，保護學生的“發明創造”，充分調動學生的積極性、主動性和創造性，使學生在數學建模中的“建”順利開展。事實上，教師的正確“導向”是數學建模活動成功的保障，亦是建模活動對教師的實質要求。

值得提及的是，數學教學中培養學生的問題意識的重要性。在筆者看來，問題意識是數學建模的開始並決定著“建”的進程。而且，問題意識也關係到學生的數學素質的培養。因此，數學建模教學有必要加強學生問題意識的“建”。

另外，數學建模數學主要包括兩個方面：一是如何將實際問題“數學化”；二是如何利用數學工具處理這個模型。當前的數學教學，對後者較為重視而對前者淡漠，造就了許多對數學實際來源和應用“掐了頭去了尾”的數學怪物，而且“中斷”也未燒得很好。顯然，這是對“建”

的過程缺乏理解的惡果。因此，數學建模中的“建”昭示著數學教育改革的方向。

毫無疑問，數學建模，“建”字當頭。

參考文獻：

- [1] 王光明等，現代數學教育選講，重慶：西南師範大學出版社，1998
- [2] 陳琦、劉儒德，當代教育心理學，北京：北京師範大學出版社，1997
- [3] 呂世虎等，數學建模與 21 世紀公民數學素質的培養，西北師範大學學報，1999（4）